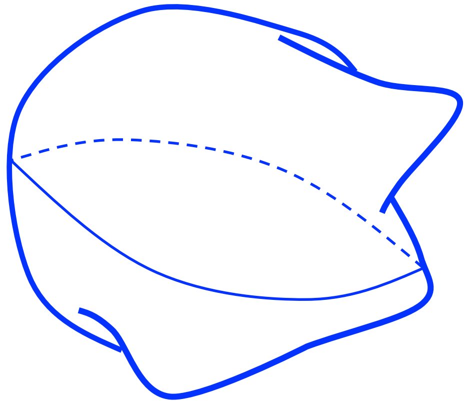
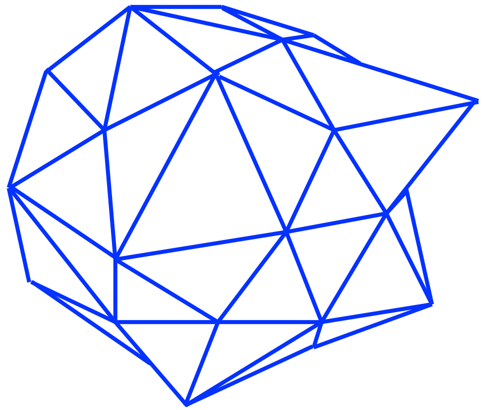
3次元 Lorentz型 Quantum Regge Calculusの
テンソルネットワーク表現



佐藤　勇貴
(福井大学)



2024年9月2日

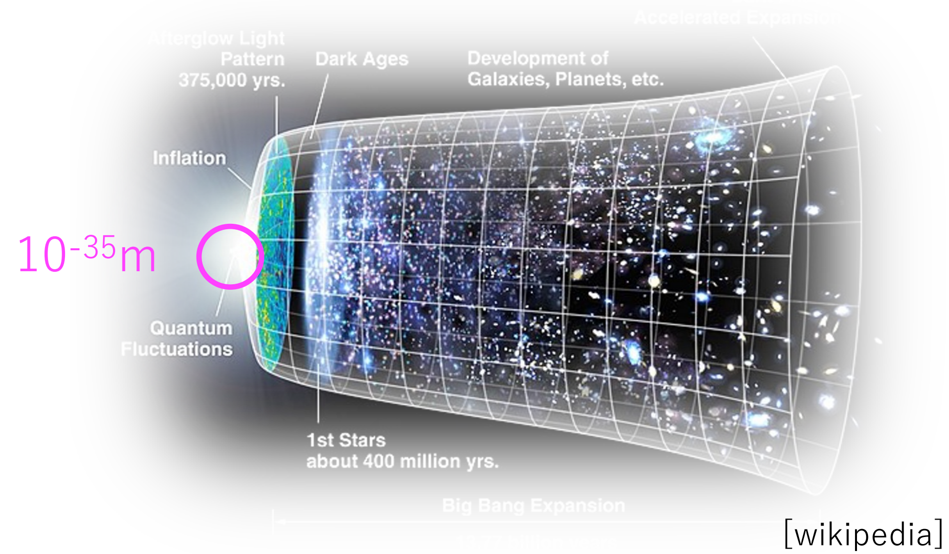
cf. Y. Ito, D. Kadoh and YS, Phys. Rev. D 106 (2022) no.10, 106004

離散的手法による場と時空のダイナミクス2024@東京工業大学

量子重力理論としてのQRC

なぜ量子重力理論が必要か？

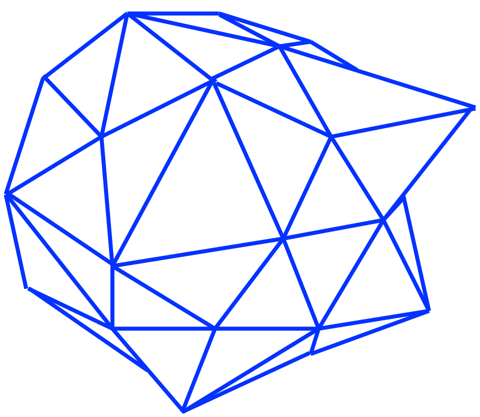
宇宙開闢の謎を解明するため



[wikipedia]

量子重力理論の候補は色々あるが…

離散的手法による**Quantum Regge Calculus** (**QRC**)を考える



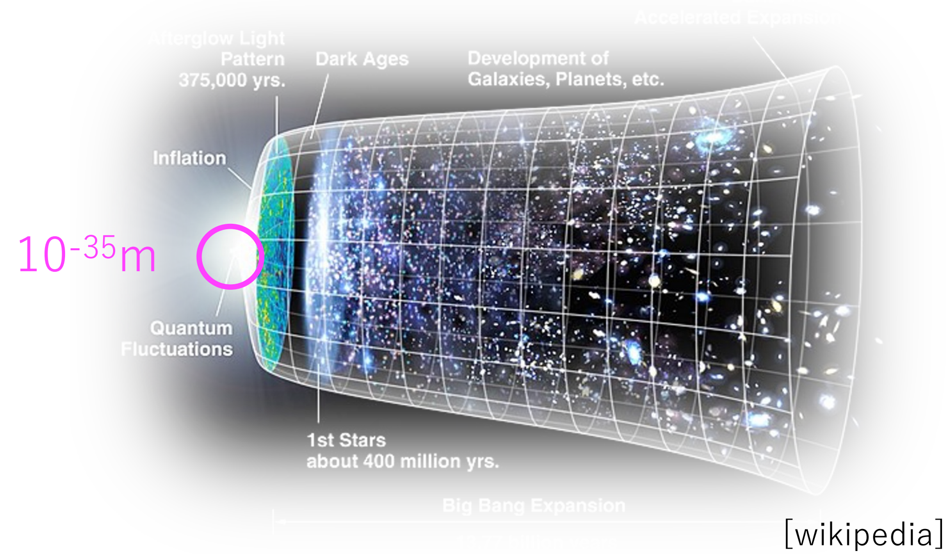
時空を単体分割する（単体分割は固定）

力学変数 = 単体の辺の長さ

量子重力理論としてのQRC

なぜ量子重力理論が必要か？

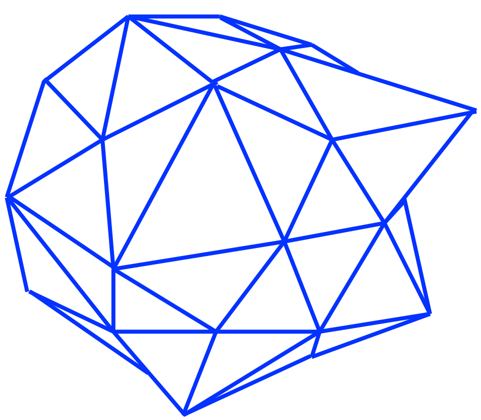
宇宙開闢の謎を解明するため



[wikipedia]

量子重力理論の候補は色々あるが…

離散的手法による**Quantum Regge Calculus** (**QRC**)を考える



特にLorentz型QRCを解析したい：

一般化されたシンプルを用いたアプローチ

[Jia, 2021]

テンソルネットワーク法を用いたアプローチ

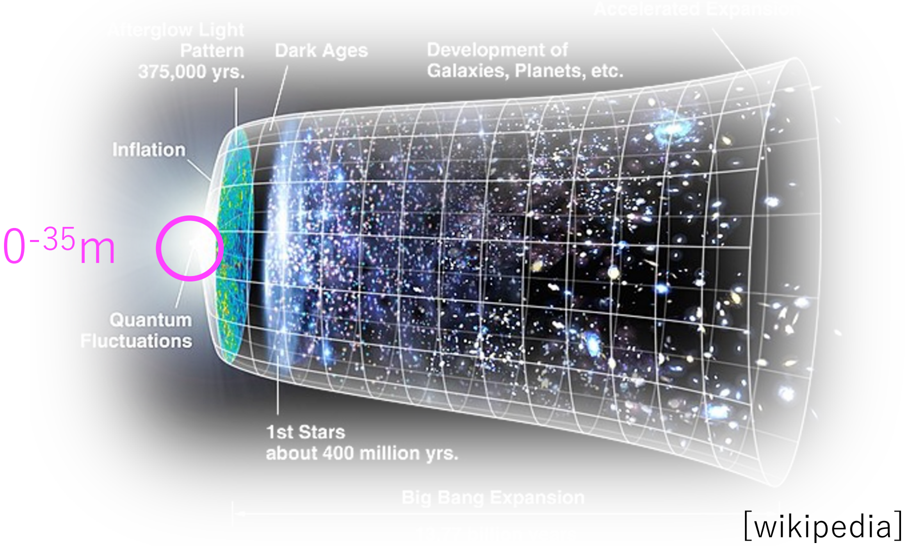
[Ito-Kadoh-Sato, 2022]

量子重力理論としてのQRC

なぜ量子重力理論が必要か？

宇宙開闢の謎を解明するため

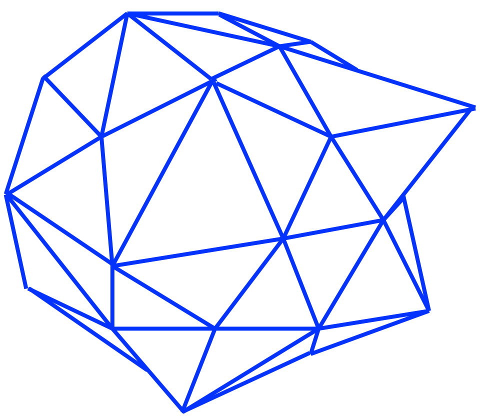
10^{-35}m



[wikipedia]

量子重力理論の候補は色々あるが…

離散的手法による**Quantum Regge Calculus** (**QRC**)を考える



特にLorentz型QRCを解析したい：

一般化されたシンプルを用いたアプローチ

[Jia, 2021]

テンソルネットワーク法を用いたアプローチ

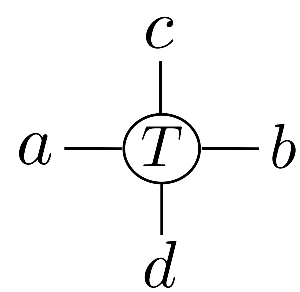
このお話をします [Ito-Kadoh-Sato, 2022]

テンソル繰り込み群 (TRG) [Lavin-Nave, 2007]

TRGは分配関数を以下の方法で数値的に計算する手法である：

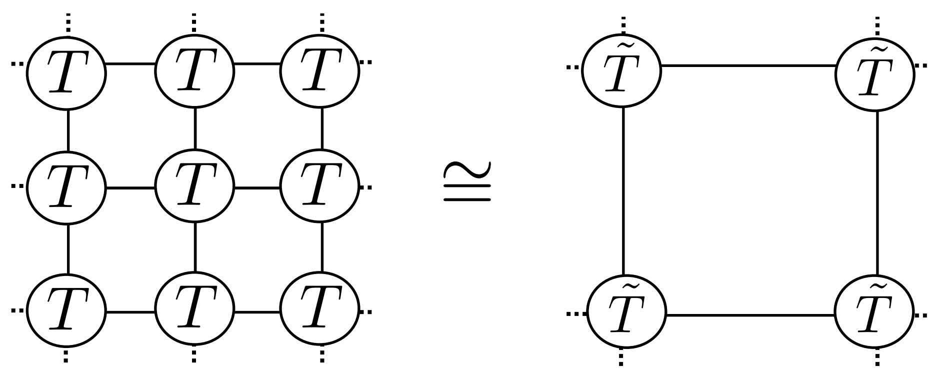
(1) 分配関数を縮約されたテンソルの積（テンソルネットワーク）で表現する

$$Z = T_{abcd}T_{aefg}\cdots \qquad T_{abcd} \longleftrightarrow$$



(2) テンソルネットワークを効率的に粗視化する

$$Z =$$



利点:

統計的取り扱いをしないため, 符号問題がない (cf. Lefschetz thimble, complex Langevin)

比較的大きな格子サイズの取り扱いが可能

Outline

1. ~~導入~~
2. Regge Calculus
3. Lorentz型 Regge Calculus
4. Lorentz型 Quantum Regge Calculus
5. 3次元Lorentz型QRC
6. まとめと展望

論文未投稿のため
共有版で削除しました

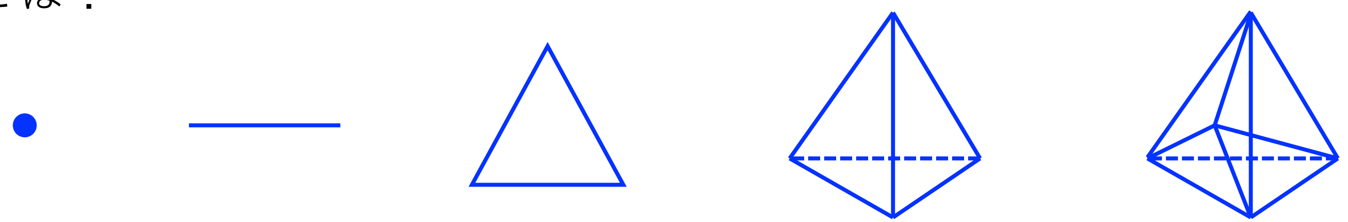
Regge Calculus

Regge Calculus [Regge, 1961]

Regge Calculusとは？

連続時空を単体複体で近似して、座標を導入せず時空の力学を記述する方法

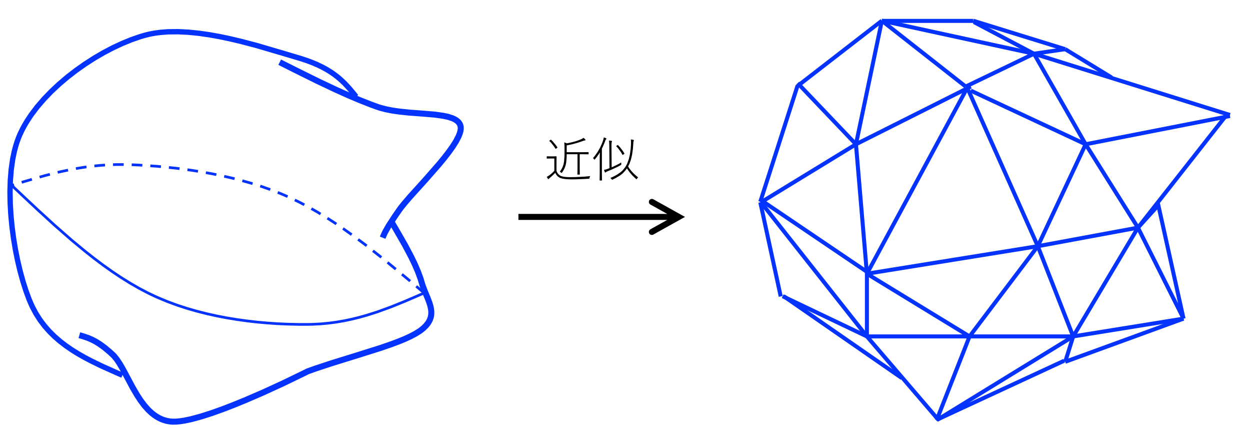
単体とは？



0次元　1次元　2次元　3次元　4次元

などなど

２次元単体複体の例：

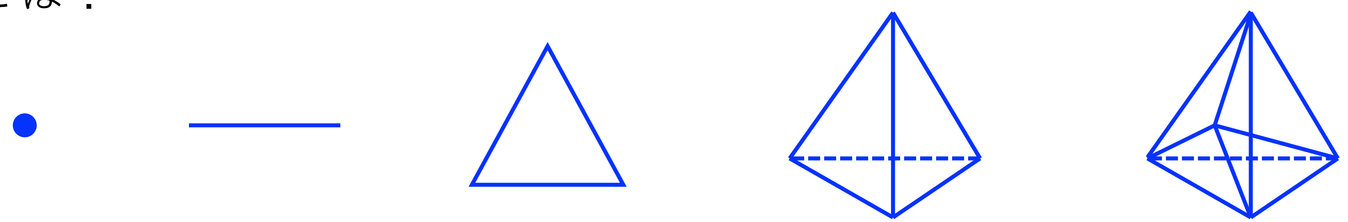


Regge Calculus [Regge, 1961]

Regge Calculusとは？

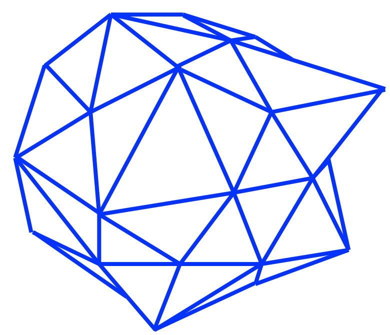
連続時空を単体複体で近似して、座標を導入せず時空の力学を記述する方法

単体とは？



0次元 1次元 2次元 3次元 4次元

などなど



重要事項：

1. 単体の内部は平坦時空

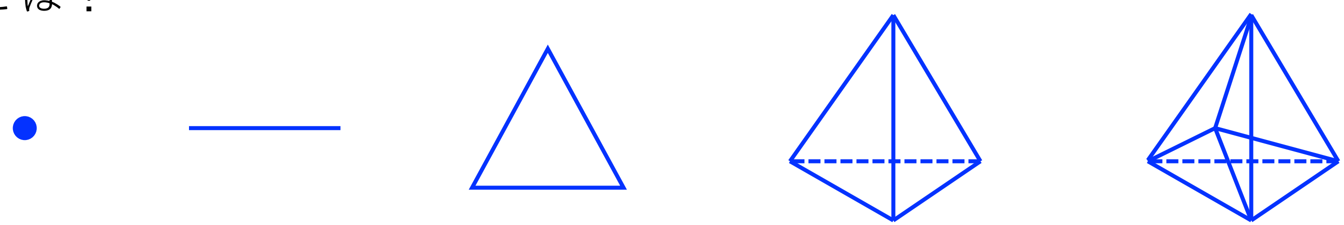
2. 時空の曲率は余次元２の単体（=hinge）での円錐特異点で表される

Regge Calculus [Regge, 1961]

Regge Calculusとは？

連続時空を単体複体で近似して、座標を導入せず時空の力学を記述する方法

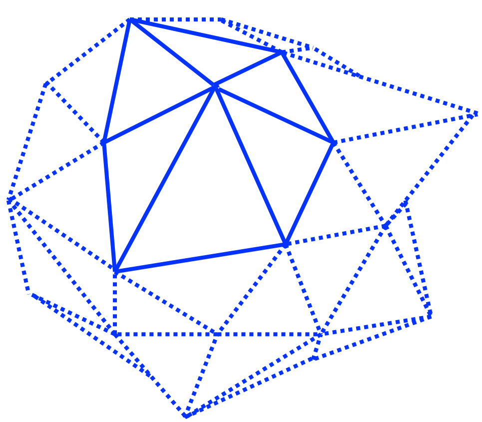
単体とは？

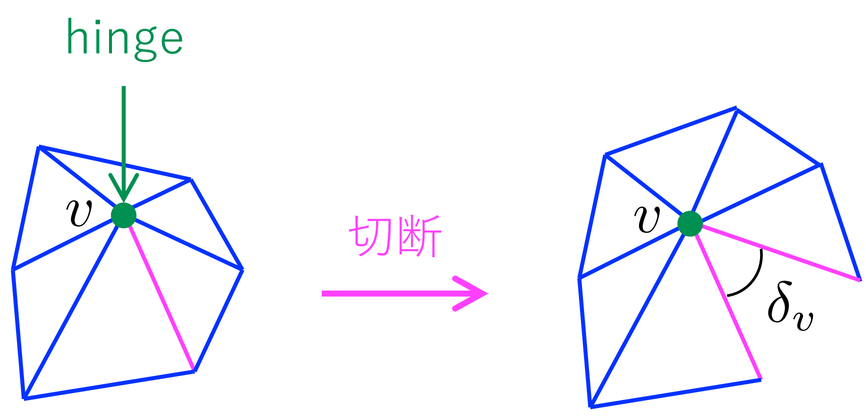


などなど

0次元　1次元　2次元　3次元　4次元

２次元単体複体の例：



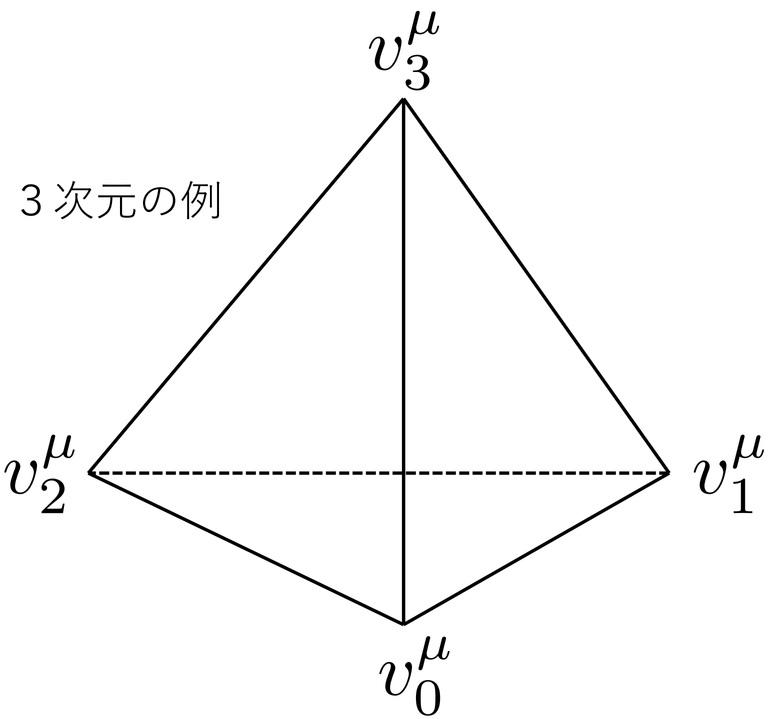


$$R \propto \delta_v$$

Lorentz型 Regge Calculus

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

$\mathbb{R}^{1,d-1}$ に埋め込まれたd次元単体（ σ_d ）を考える：



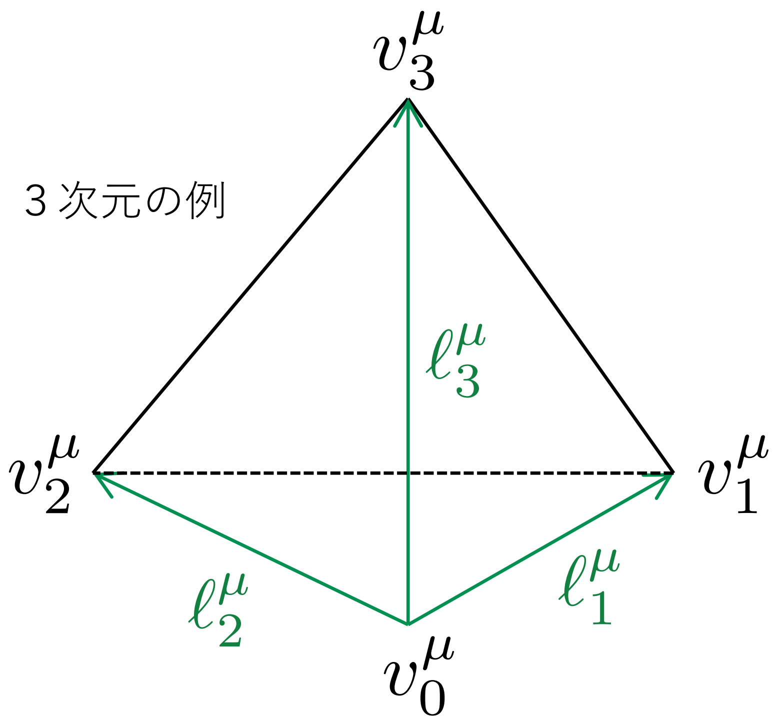
３次元の例

頂点の座標：

$$v_i^\mu \ (i = 0, 1, \cdots, d;\ \mu = 1, 2, \cdots, d)$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

$\mathbb{R}^{1,d-1}$ に埋め込まれたd次元単体（ σ d ）を考える：



頂点の座標：

$$v_i^\mu \;\; (i = 0, 1, \cdots, d;\;\; \mu = 1, 2, \cdots, d)$$

Edgeベクトル：

$$\ell_a^\mu := v_a^\mu - v_0^\mu \;\; (a = 1, \cdots, d)$$

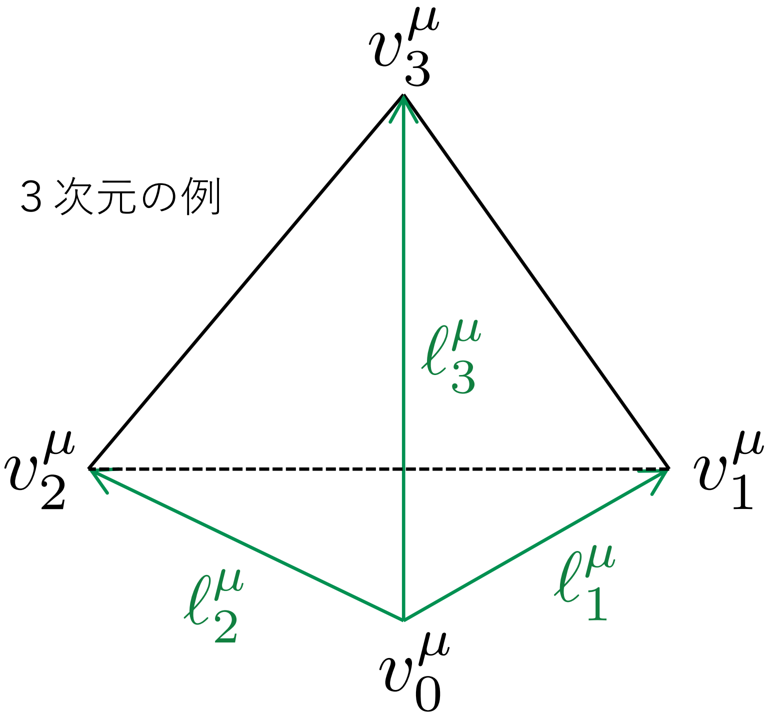
σ d の内部座標：

$$x^\mu(\xi) = \xi^1 \ell_1^\mu + \xi^2 \ell_2^\mu + \cdots + \xi^d \ell_d^\mu$$

$$(0 \leq \xi^1 + \cdots + \xi^d \leq 1;\;\; 0 \leq \xi^a \leq 1)$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

$\mathbb{R}^{1,d-1}$ に埋め込まれたd次元単体（ σ_d ）を考える：



頂点の座標：

$$v_i^\mu \ (i = 0, 1, \cdots, d; \ \mu = 1, 2, \cdots, d)$$

Edgeベクトル：

$$\ell_a^\mu := v_a^\mu - v_0^\mu \ (a = 1, \cdots, d)$$

σ_d の内部座標：

$$x^\mu(\xi) = \xi^1 \ell_1^\mu + \xi^2 \ell_2^\mu + \cdots + \xi^d \ell_d^\mu$$

$$(0 \leq \xi^1 + \cdots + \xi^d \leq 1; \ 0 \leq \xi^a \leq 1)$$

（正の向き付けを持つ）基底ベクトル：$\{\ell_a^\mu\}_{a=1}^d$

$$(\partial/\partial\xi^a)^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} = \ell_a^\mu$$

誘導計量テンソル：

Minkowski計量

$$g_{ab} = g(\partial/\partial\xi^a, \partial/\partial\xi^b) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}\underline{g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu)} = \ell_a^\mu \ell_b^\nu \underline{\eta_{\mu\nu}} =: \langle \ell_a | \ell_b \rangle$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

（符号付）自乗長さ：

$$s_{ij} := \langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

（符号付）自乗長さ：

$$s_{ij} := \langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle$$

$$s_{a0} = \langle \ell_a | \ell_a \rangle = g_{aa}$$

$$s_{ab} = \langle \ell_a - \ell_b | \ell_a - \ell_b \rangle = g_{aa} - 2g_{ab} + g_{bb}$$

$$\boxed{g_{ab} = \frac{1}{2}\left(s_{a0} + s_{b0} - s_{ab}\right)}$$

誘導計量は（符号付）自乗長さの関数となる

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

d次元単体（ σ d ） の体積について

$$V_{\sigma_d} = \int_{D(\sigma_d)} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^d$$

（D(σ d)：単体 σ dの内部領域）

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_{0 \le \xi^1 + \xi^2 + \cdots + \xi^d \le 1} \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2 \cdots \mathrm{d}\xi^d$$

$$\left(\ell_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\right)$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

d次元単体（ σ d ） の体積について

$$V_{\sigma_d} = \int_{D(\sigma_d)} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^d$$

（D(σ d)：単体 σ dの内部領域）

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_{0 \le \xi^1 + \xi^2 + \cdots + \xi^d \le 1} \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2 \cdots \mathrm{d}\xi^d \qquad \left(\ell_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\right)$$

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_0^1 \mathrm{d}\xi^1 \int_0^{1-\xi^1} \mathrm{d}\xi^2 \cdots \int_0^{1-\xi^1-\cdots-\xi^{d-1}} \mathrm{d}\xi^d$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

d次元単体（ σ d ） の体積について

$$V_{\sigma_d} = \int_{D(\sigma_d)} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^d$$

（D(σ d)：単体 σ dの内部領域）

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_{0\le\xi^1+\xi^2+\cdots+\xi^d\le 1} \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2 \cdots \mathrm{d}\xi^d \qquad \left(\ell_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\right)$$

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}\xi^1 \int_0^{1-\xi^1} \mathrm{d}\xi^2 \cdots \int_0^{1-\xi^1-\cdots-\xi^{d-1}} \mathrm{d}\xi^d}_{=\frac{1}{d!}}$$

cf. 多重積分に関するCauchyの公式：

$$\int_a^x \mathrm{d}x_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} \mathrm{d}x_{n-2} \cdots \int_a^{x_1} f(x_0)\mathrm{d}x_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y)\mathrm{d}y$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

d次元単体（ σ d ） の体積について

$$V_{\sigma_d} = \int_{D(\sigma_d)} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^d$$

（D(σ d)：単体 σ dの内部領域）

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_{0 \leq \xi^1+\xi^2+\cdots+\xi^d \leq 1} \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2 \cdots \mathrm{d}\xi^d \qquad \left(\ell_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\right)$$

$$= \frac{1}{d!} \det\left(\ell_a^\mu\right) > 0$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

d次元単体（ σ d ） の体積について

$$V_{\sigma_d} = \int_{D(\sigma_d)} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^d$$

（D(σ d)：単体 σ dの内部領域）

$$= \det\left(\ell_a^\mu\right) \int_{0 \le \xi^1+\xi^2+\cdots+\xi^d \le 1} \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2 \cdots \mathrm{d}\xi^d \qquad \left(\ell_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a}\right)$$

$$= \frac{1}{d!} \det\left(\ell_a^\mu\right) > 0$$

$$= \frac{1}{d!} \sqrt{\underbrace{\left|\det\left(\eta_{\mu\nu}\right)\right|}_{=1} \det\left(\ell_a^\mu\right) \det\left(\ell_b^\nu\right)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{d!} \sqrt{\left|\det\left(g_{ab}\right)\right|}}$$

体積も（符号付）自乗長さの関数となる

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

2つのベクトル間の複素角： $\theta = \psi + i\eta \qquad (\eta \in \mathbb{R},\ \psi \in [0,\pi])$

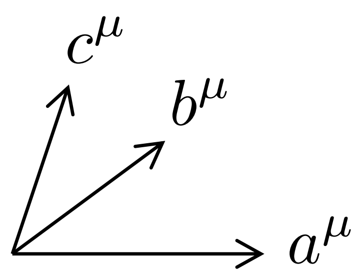
$$\cos\theta(a,b) = \frac{\langle a|b\rangle}{\sqrt{\langle a|a\rangle}\sqrt{\langle b|b\rangle}} \qquad \sin\theta(a,b) = \frac{\sqrt{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle - \langle a|b\rangle^2}}{\sqrt{\langle a|a\rangle}\sqrt{\langle b|b\rangle}}$$

ただし， $\sqrt{-1} := i$

複素角も（符号付）自乗長さの関数となる

加法性が成立する：

$$\theta(a,c) = \theta(a,b) + \theta(b,c)$$

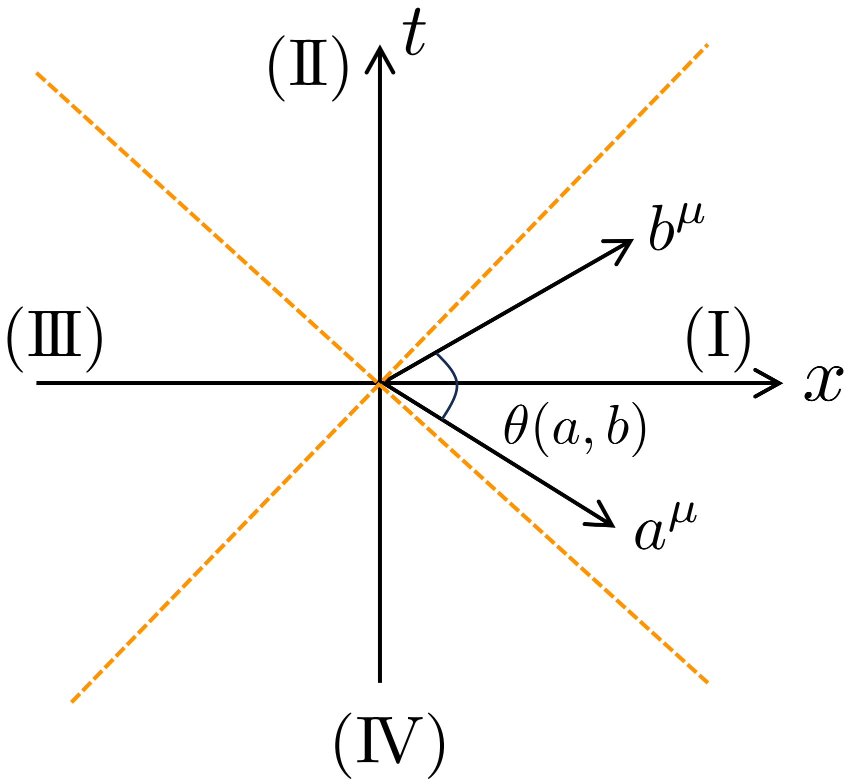


ψ と η は次の式から求められる：

$$\cos\theta = \cosh\eta\cos\psi - i\sinh\eta\sin\psi,$$
$$\sin\theta = \cosh\eta\sin\psi + i\sinh\eta\cos\psi$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

２つのベクトル間の複素角： $\theta = \psi + i\eta \quad (\eta \in \mathbb{R},\ \psi \in [0, \pi])$



（１）２ベクトル間に光線がないとき

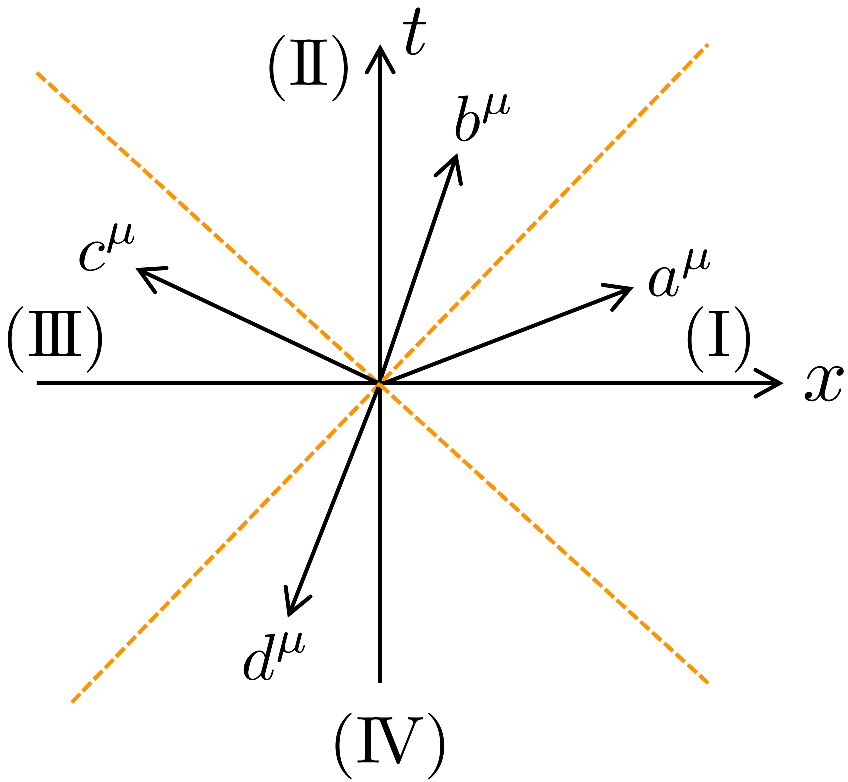
$$\theta = i\eta$$

(I) または (III)にいるとき： $\eta > 0$

(II) または (IV)にいるとき： $\eta < 0$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

2つのベクトル間の複素角： $\theta = \psi + i\eta \quad (\eta \in \mathbb{R},\ \psi \in [0,\pi])$



（1）2ベクトル間に光線がないとき

$$\theta = i\eta$$

(I) または (III)にいるとき： $\eta > 0$

(II) または (IV)にいるとき： $\eta < 0$

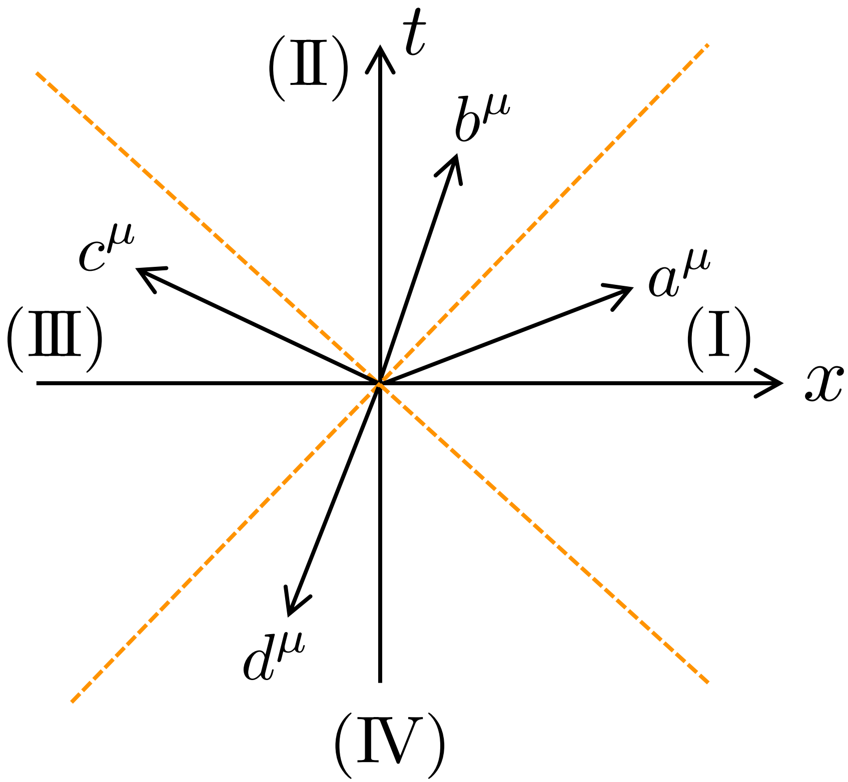
（2）2ベクトル間に光線があるとき

$$\theta(a,b) = \frac{\pi}{2} + i\eta \quad \text{(光線１本)}$$

$$\theta(a,c) = \pi + i\eta' \quad \text{(光線２本)}$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

２つのベクトル間の複素角： $\theta = \psi + i\eta \qquad (\eta \in \mathbb{R},\ \psi \in [0, \pi])$



（１）２ベクトル間に光線がないとき

$$\theta = i\eta$$

(I) または (III)にいるとき： $\eta > 0$

(II) または (IV)にいるとき： $\eta < 0$

（２）２ベクトル間に光線があるとき

$$\theta(a, b) = \frac{\pi}{2} + i\eta \qquad \text{(光線１本)}$$

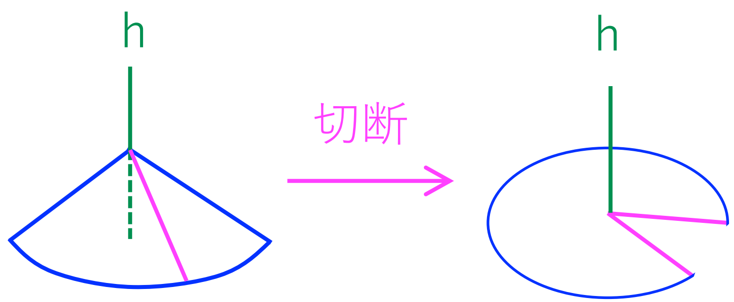
$$\theta(a, c) = \pi + i\eta' \qquad \text{(光線２本)}$$

複素角の和：

$$\theta(a, b) + \theta(b, c) + \theta(c, d) + \theta(d, a) = 2\pi$$

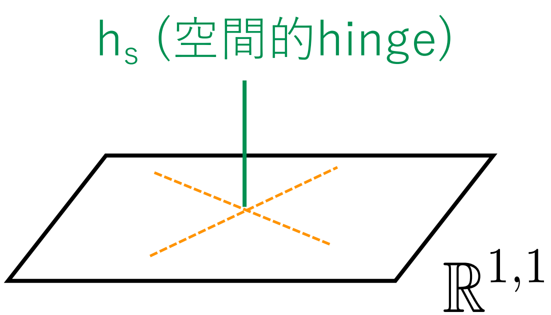
Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

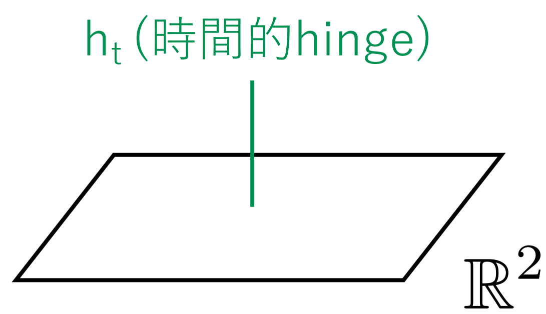
復習：時空の曲率は余次元２の単体（=hinge）での円錐特異点で表される



曲率はhingeに直交する２次元面での
欠損角に比例する

hingeに直交する２次元面は２次元Minkowsnski時空か２次元Euclid空間になる



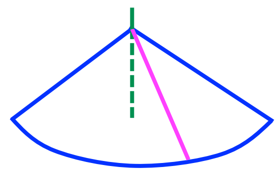


⟶ この思想のもと、４次元で作用を構成してみる

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

(i) 時間的hinge (h_t) 周りの計量テンソル

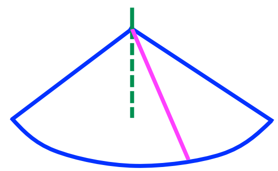
$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = \underbrace{-dt^2 + dx^2}_{\text{hinge } (h_t)} + \underbrace{dr^2 + r^2\left(1 - \frac{\psi_{h_t}}{2\pi}\right)^2 d\phi^2}$$



Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

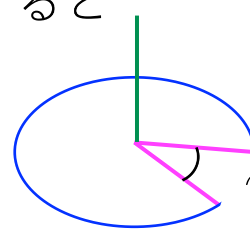
(i) 時間的hinge (h_t) 周りの計量テンソル

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \underbrace{-dt^2 + dx^2}_{\text{hinge }(h_t)} + \underbrace{dr^2 + r^2 \overbrace{\left(1-\frac{\psi_{h_t}}{2\pi}\right)^2}^{g_{\phi\phi}} d\phi^2}$$



hingeの周りを（距離をrに保ち）一周すると

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sqrt{g_{\phi\phi}} = (2\pi - \psi_{h_t})r$$

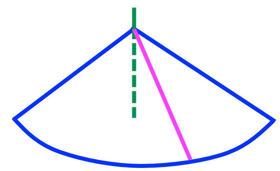


ψ_{h_t}

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

(i) 時間的hinge (h_t) 周りの計量テンソル

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \underbrace{-dt^2 + dx^2}_{\text{hinge }(h_t)} + \underbrace{dr^2 + \overbrace{r^2\left(1-\frac{\psi_{h_t}}{2\pi}\right)^2}^{g_{\phi\phi}} d\phi^2}$$



円錐特異点を正則化する：

$$g_{\phi\phi} = r^2\left(1-\frac{\psi_{h_t}}{2\pi}\right)^2 \;\Rightarrow\; e^{2\lambda(r)}$$

ここで

$$e^{2\lambda(r)}\big|_{r\gg 1} \sim r^2\left(1-\frac{\psi_{h_t}}{2\pi}\right)^2 \qquad\qquad e^{2\lambda(r)}\big|_{r\ll 1} \sim r^2$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

$$R = -2(\lambda'' + (\lambda')^2)\ , \ \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = e^{\lambda}$$ より

$$\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}R = -2(e^{\lambda})''$$

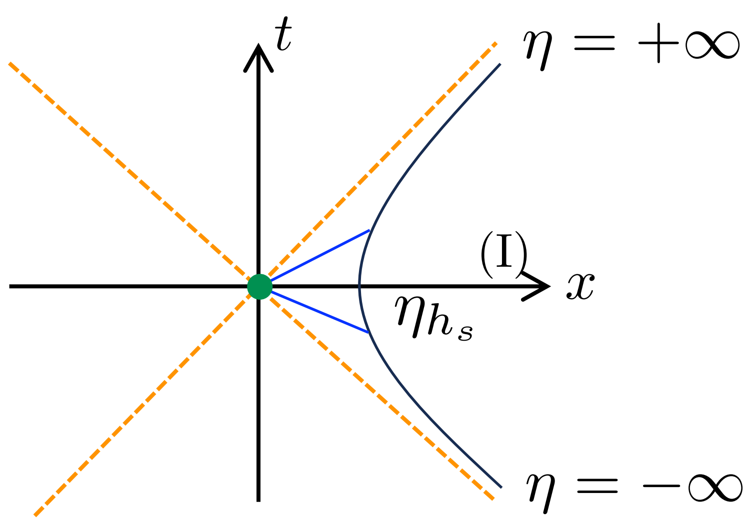
従って

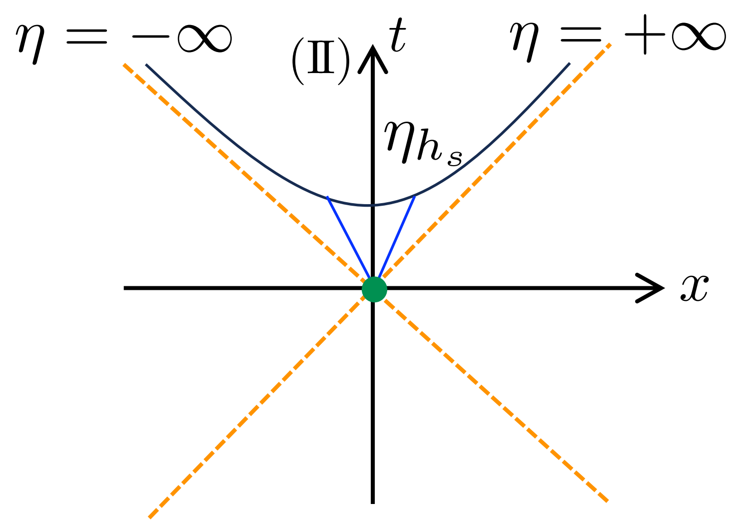
$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}R = \underbrace{\int_{D(h_t)} \mathrm{d}t\mathrm{d}x}_{V_{ht}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\left(-2(e^{\lambda})''\right)$$

$$= 2\psi_{h_t}V_{h_t}$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

(ii) 空間的hinge (h_s) 周りの時空を考える





$$t = r\sinh\eta,\ \ x = r\cosh\eta$$

空間的欠損

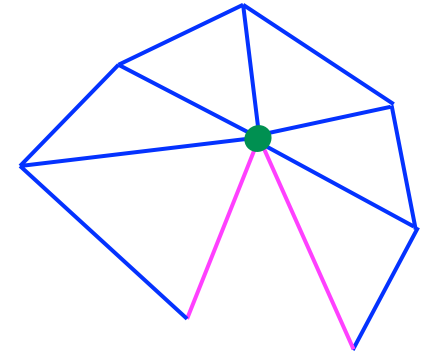
$$\int d^4x\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}R = 2\eta_{h_s}V_{h_s}$$

$$t = r\cosh\eta,\ \ x = r\sinh\eta$$

時間的欠損

$$\int d^4x\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}R = -2\eta_{h_s}V_{h_s}$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]



Lorentz型 Regge 作用

$$S = \kappa \sum_h V_h \epsilon_h - \lambda \sum_\sigma V_\sigma$$

ここで

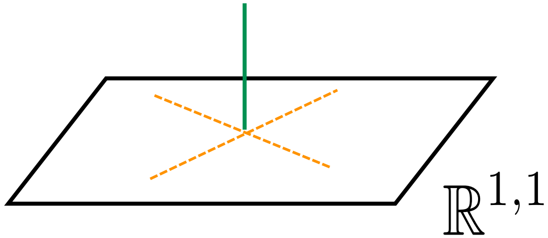
$$\epsilon_h = \underbrace{e^{i\varphi(h)} \underbrace{\left(2\pi - \sum_{\sigma\ni h}\theta_{\sigma,h}\right)}_{\psi_{h_t}\ \text{または}\ i\eta_{h_s}}}_{\text{実}}$$

$$\varphi(h_s) = -\frac{\pi}{2},\ \ \varphi(h_t) = 0$$

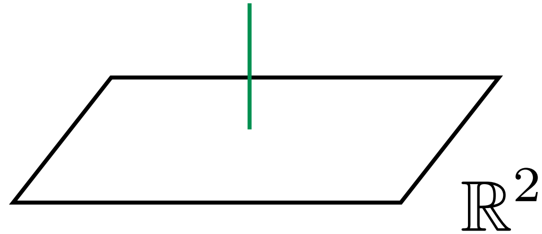
空間的欠損：$\eta_{h_s} > 0$

時間的欠損：$\eta_{h_s} < 0$

h_s (空間的hinge)



h_t (時間的hinge)



cf. 複素角

$$\theta = \psi + i\eta$$

Lorentz型 Regge Calculus [Sorkin, 1975]

Lorentz型 Regge 作用

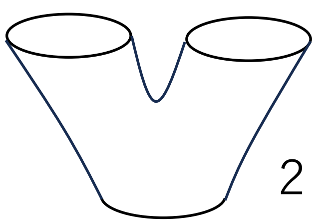
$$S = \kappa \sum_h V_h \epsilon_h - \lambda \sum_\sigma V_\sigma$$

ここで

$$\epsilon_h = e^{i\varphi(h)} \left(2\pi - \sum_{\sigma \ni h} \theta_{\sigma,h} \right) \qquad \varphi(h_s) = -\frac{\pi}{2},\ \varphi(h_t) = 0$$

空間的hingeに直交する面に存在する光線の数が４本でないとき作用に虚部が出現

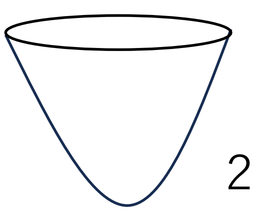
(i) 光線の数 > 4 (“Trouser-like”)



２次元の例

$$e^{iS} \sim \text{抑制}$$

(ii) 光線の数 < 4 (“Yarmulke-like”)



２次元の例

$$e^{iS} \sim \text{増大}$$

Lorentz型 Quantum Regge Calculus

Lorentz型 Quantum Regge Calculus

経路積分

$$Z = \int \mathcal{D}g \ e^{iS_{\mathrm{EH}}[g]}$$

Lorentz型 Quantum Regge Calculus

経路積分

$$Z = \int \underbrace{\mathcal{D}g}\ \underbrace{e^{iS_{\mathrm{EH}}[g]}}$$

離散化

$$e^{iS[\{\ell^2\}]}$$

$$\Theta(\mathrm{constraints})\ f(\ell_1^2, \ell_2^2, \cdots)\ \prod_{e\in\mathrm{edges}} \mathrm{d}\ell_e^2$$

fを選ぶ

$$\Theta(\mathrm{constraints})\ \prod_{\sigma}(V_\sigma)^{\beta}\ \prod_{e\in\mathrm{edges}} \mathrm{d}\ell_e^2$$

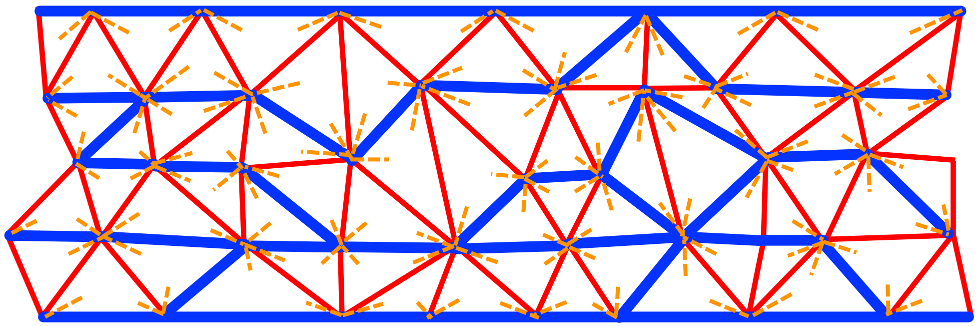
Lorentz型 Quantum Regge Calculus

：空間的辺

：時間的辺

因果律 (Causality) をどう考えるか？

(i) hinge causality（hingeに直交する２次元面に光線４本）

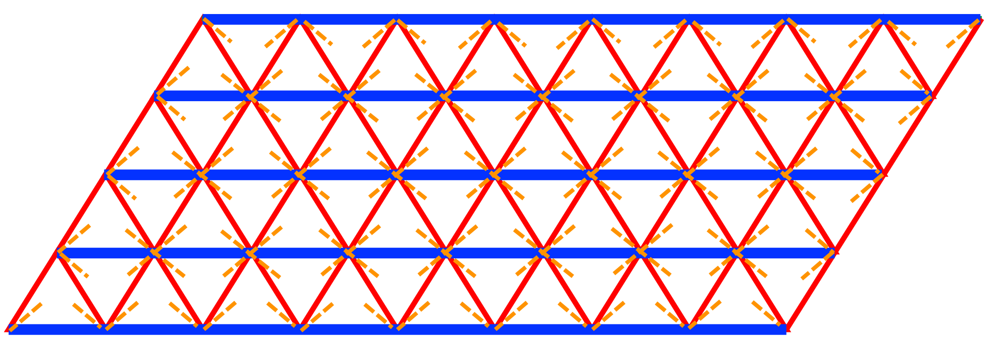


各頂点に4本の光線

cf. locally causal dynamical triangulations [Roll-Ruijl, 2015]

→ 閉じた時間的曲線の存在は禁止されない

(ii) 大域的双曲性



各頂点に4本の光線

かつ

閉じた時間的曲線はない

以降は論文未投稿のため
共有版で削除しました
（すみません…）