

量子重力理論にまつわる問題群

Y. Watabiki

Talk @ Discrete Approaches to the
Dynamics of Fields and Space-Time
held at Tokyo Institute of Technology
on 2/9/2024

量子重力理論による一つの解決策の提案

- 空間が存在しない世界から生まれる宇宙
- 1次元空間から高次元空間へ
- インフレーションの終了とビッグバン
- 宇宙の加速膨張と宇宙の終焉
- 時間誕生のメカニズムについて

This talk is based on <https://arxiv.org/abs/2212.13109>.



CONTENTS

1. Introduction

- a. Overview of Quantum Gravity (QG)

2. Problems in Quantum Gravity

- a. 点から始まる宇宙
- b. 編み上げ機構
- c. Coleman機構
- d. 宇宙の加速膨張と人間原理

3. Basic of Our Theory

- a. 理論の定義
- b. 時間が誕生する世界
- c. 弦理論との関係

1. Introduction

a. Overview of Quantum Gravity (QG)

- 分配関数

The partition function of QG is defined by summing up all possible configurations as

[\mathcal{T} represents one of the topologies of spacetime.]

$$Z = \sum_{\mathcal{T}} C_{\mathcal{T}} \int \mathcal{D}\mathcal{X} \exp \left\{ i \int d^d x dt \mathcal{L}[\mathcal{X}(x, t)] \right\}$$
$$\mathcal{X}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \phi_a(x, t), \psi_\alpha(x, t), A_\mu(x, t), g_{\mu\nu}(x, t) \}$$

→ この計算は2次元時空でのみ成功している。

2. Problems in Quantum Gravity^{2-a}

a. 点から始まる宇宙

- 宇宙は点から始まった？

解1 その通り。

- ➡ 時空がユークリッド計量ならば始まる点は特定されず、発散の問題は起きない。(Hawkingの虚時間)
- ➡ 宇宙の始まりとなる点の近傍でエネルギーの発散が生じるが、プランクスケールでエネルギー保存則が成立しない世界になれば、発散は回避可能。

解2 点のように小さかったが、点ではなかった。

- ➡ 宇宙は永遠に膨張を続け、揺らぎによりその一部が正の真空エネルギーを生み出し、宇宙誕生となる。(永久インフレーション)
- ➡ 宇宙は膨張と収縮を繰り返し、収縮から膨張へ転じる瞬間がビッグバンと呼ばれる現象となる。(サイクリック宇宙論)

● 宇宙が点から始まるときのシナリオ

Hawkingの虚時間のアイデアは、量子重力理論の視点から見ると、解決しなければならない問題が存在する。

- 量子重力理論では、ありとあらゆる状態を足し上げるため、ビッグバン以降もユークリッド計量の時空が現れる可能性がある。たとえば、現在の宇宙の中の至る所にユークリッド計量の空間が現れる可能性がある。この現象を禁止する必要がある。要するに、ビッグバンが至る所に現れないような仕組みが必要である。

宇宙が点から膨張するときは、その領域でエネルギー保存則が成り立たないようにしてみよう。

- 宇宙は1次元空間として誕生する。ハミルトニアンはエネルギー L_0 と非可換であればよい。しかし、このシナリオの場合、ビッグバンが始まる前に宇宙が高次元空間に変化する必要がある。

● 宇宙のトポロジー選択問題

宇宙のトポロジーはどのようにして決まるのか？

静的な解なら見つける方法はあるかもしれないが、
空間が誕生する世界でトポロジーの選択はどうやる？
誕生の瞬間に決めなければならない。これは静的な
解を見つけないことと訳が違う。

宇宙が点から始まるなら、トポロジーの選択問題が生じる。

→ たとえば、宇宙が3次元空間から始まるなら、
3次元空間の分類が必要。これは困難。
しかし、宇宙が1次元空間から始まるなら
閉じた空間はループのみしかないので、
選択問題は起こらない。

- **Laplaceの悪魔**（ある特定の初期条件を知る者）

宇宙の初期条件はどのようにして決まる？

永久インフレーションやサイクリック宇宙論の場合、
初期条件を決めることはない。

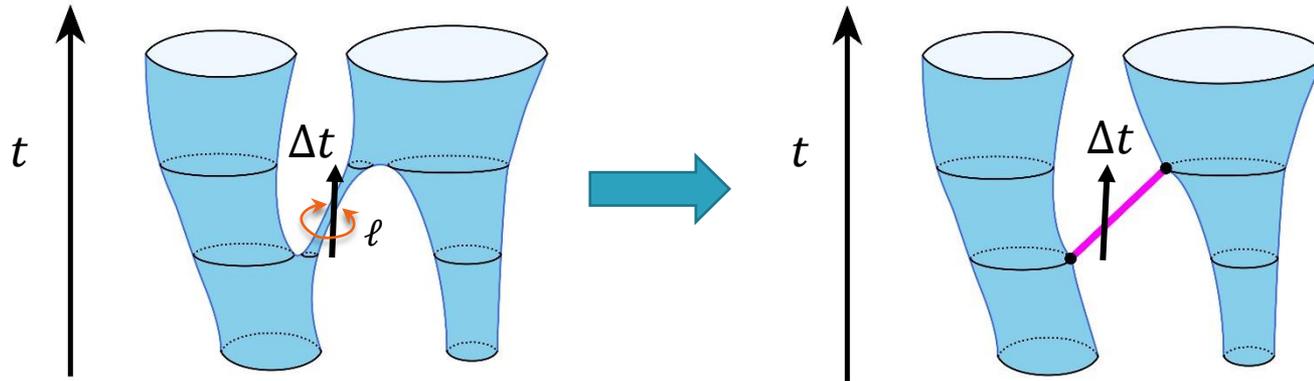
可能な限りの世界が存在するので、
現在の宇宙のありようを説明することはない。

しかし、宇宙が点から始まるなら、初期条件を決めるものはいない

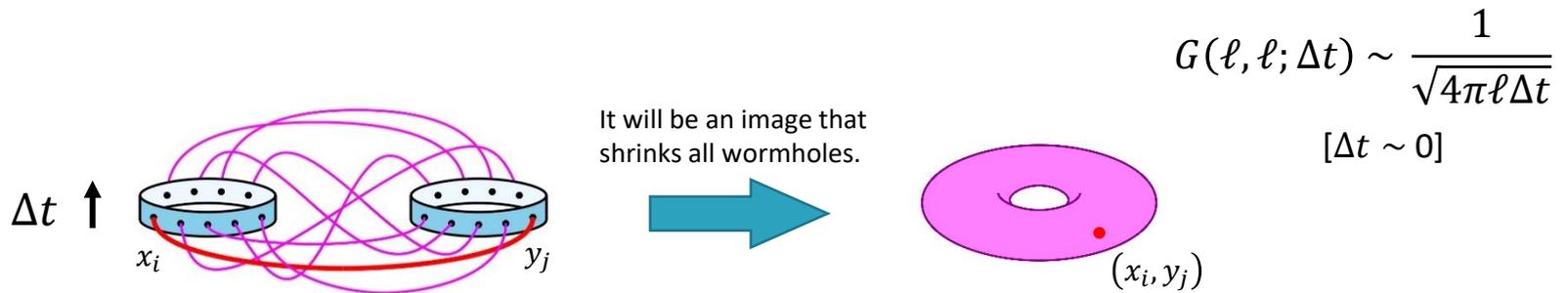
➡ 点の状態は唯一なので初期条件は一意的に決まり、
Laplaceの悪魔のような超越的な者が現れることは
ない。

b. 編み上げ機構 (Dimension Enhancement)

Contributions by tiny wormholes are dominant.



(A wormhole with small l is shown by a purple line.)



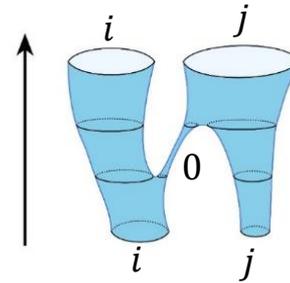
$$G(\ell, \ell; \Delta t) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\ell\Delta t}}$$

[$\Delta t \sim 0$]

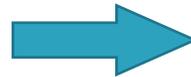
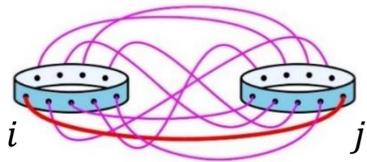
(The set of tiny wormholes gives a torus topology.)

● The conditions for 編み上げ機構

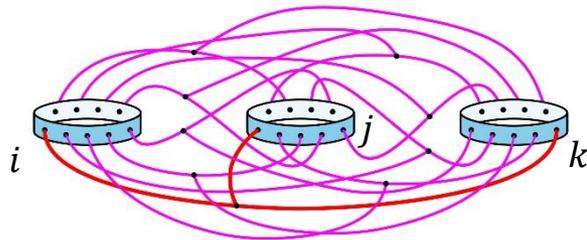
$$G(\ell, \ell; \Delta T) \rightarrow +\infty \text{ for } \Delta T \rightarrow 0$$



$$d_{000} = g \quad d_{00i} = 0 \quad d_{0ij} = g\delta_{ij}$$



$d = 2$ 次元トーラス空間



$d = 3$ 次元トーラス空間

C. Coleman機構 (Vanishing Cosmo. Const.)

どのようにしてインフレーションが終了したのか？



電弱相互作用の自発的対称性の破れで
真空のエネルギーは変化する？

$$V(\phi) = -m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4$$



ダークエネルギーが電弱
相互作用のスケールに
なってしまう。

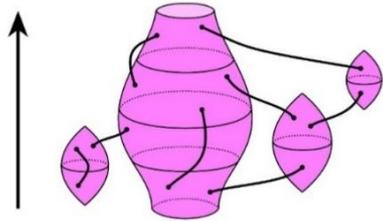


$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 + \Lambda$$

しかし、これでは電弱相互作用と宇宙項 Λ
のスケールが不自然過ぎるくらい違う。

- The conditions for the Coleman mechanism

$$G(\ell, \ell; T) \rightarrow \text{finite for } T \rightarrow +\infty$$



← ℓ が非常に小さく, 有限の長さ T ワームホールによって繋げると, 真空エネルギーはゼロになる。

→ 電弱相互作用のような自発的な対称性の破れによる真空エネルギーの変化があったとしても, 常に真空エネルギーがゼロになるように働く。
(ダークエネルギーは現れない)

d. 宇宙の加速膨張と人間原理

なぜ宇宙の加速膨張は今なのか？

ダークエネルギーはプランクエネルギーの 10^{-120} 倍。
これを時間を読み直すと、加速膨張の時間のスケールはプランクスケールの 10^{60} 倍となる。
これはなぜか現在の時刻138億年と同じスケール。

なぜ 138億年なのか？ どのようにして決まるのか？

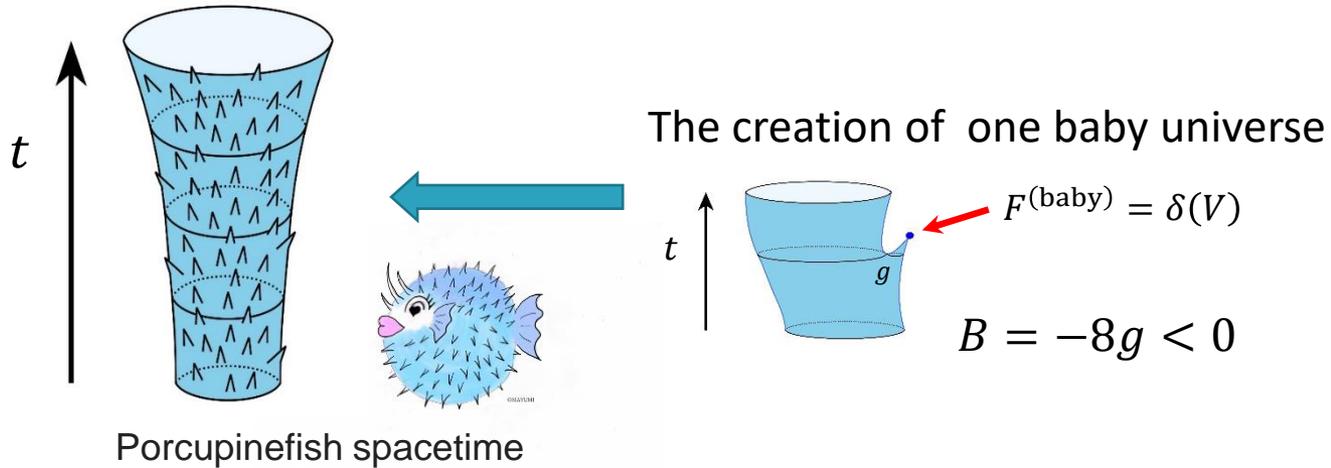
人類の誕生には、進化論的に数十億年の時間が必要。
しかし、これは下限値であり、現在が数兆年、数京年、
数垓年、あるいはそれ以上の時間かもしれない。
つまり、謎である。

● 宇宙の加速膨張

This term comes from the leading term of disk amplitude $F(L)$

$$F(L) = \delta(V) + \dots \quad \leftarrow \quad \tilde{F}(\xi) = \xi^{-1} + \dots = \frac{1}{\xi + \sqrt{\mu}}$$

\nearrow
 $F^{(\text{baby})}$



Negative g gives the accelerating expansion of Universe.

This term is the quantum effect of quantum gravity!

● 人間原理（ここでの定義）

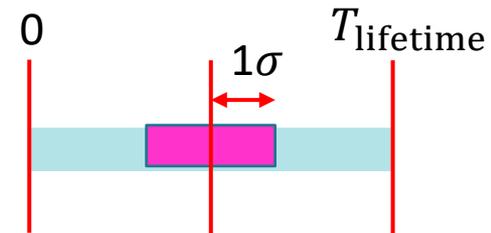
人間原理は「自身が特別な存在ではない。」という考えに基づく。
 例えば、ある一つの文明の発展が人間原理、かつ、正規分布に従うならば（どちらの仮定も根拠はない、というか、薄弱）

T_{pasttime} = 発生から現在までの時間

T_{lifetime} = 発生から消滅までの時間

とすると、現在が 1σ の中にあるのは

$$\frac{1 - \Phi(\alpha)}{2} T_{\text{lifetime}} \lesssim T_{\text{pasttime}} \lesssim \frac{1 + \Phi(\alpha)}{2} T_{\text{lifetime}}$$



$$\Phi(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\alpha\sigma}^{\alpha\sigma} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$\frac{1 - \Phi(1)}{2} = 0.1587 \dots \quad \frac{1 + \Phi(1)}{2} = 0.8413 \dots$$

● 人間原理 (つづき)

先ほどの式を変形すると,

$$\frac{2}{1 + \Phi(\alpha)} T_{\text{pasttime}} \lesssim T_{\text{lifetime}} \lesssim \frac{2}{1 - \Phi(\alpha)} T_{\text{pasttime}}$$

特に, $\alpha = 1$ のとき,

$$1.2 T_{\text{pasttime}} \lesssim T_{\text{lifetime}} \lesssim 6.3 T_{\text{pasttime}}$$

たとえば, $T_{\text{pasttime}} = 138$ 億年 とすると,

$$\text{約}164\text{億年} \lesssim T_{\text{lifetime}} \lesssim \text{約}870\text{億年}$$



$$|g|^{1/3} \lesssim \frac{1}{t_0}$$

500億年のスケールを持つパラメーターが理論に存在し, このパラメーターが加速膨張を引き起こし, 500億年のスケールで宇宙空間をバラバラにして人類が生存できない世界となるなら, 説明が付く。(人間原理)

3. Basic of Our Theory

a. 理論の定義

- Transfer Operator

The partition fun. is derived by the expectation value of Θ^* .

Our model is described by the transfer operator Θ^*

$$\Theta^* \stackrel{\text{def}}{=} e^{W_{-2}^{(3)}} \quad W_n^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \sum_{k+l+m=n} \text{Tr} : \alpha_k \alpha_l \alpha_m :$$

$$\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu} E_{\mu} \alpha_n^{\mu} \quad [\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{\nu}] = m \delta_{m+n,0} \delta^{\mu,\nu}$$

where E_{μ} is the 3×3 octonian Hermitian matrices.

(m, n are modes [$m, n \in \mathbf{Z}$], μ, ν are flavors [$\mu, \nu = 0, 1, \dots, 26$].)

b. 時間が誕生する世界

- 時間 T は真空の相転移で現れる

幾何学的な解釈が可能な真空

$$|0\rangle \Rightarrow |\text{phys}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda_3 \neq 0, \lambda_1 \neq 0, \nu \neq 0\rangle$$

$$|\{\lambda_n | n \in \mathbb{N}\}, \nu\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n \alpha_n} e^{i\nu q} |0\rangle$$

$$\Theta^* \stackrel{\text{def}}{=} e^{W_{-2}^{(3)}} \Rightarrow e^{-T\mathcal{H}} \quad \begin{array}{l} \text{コヒーレント状態} \\ \text{(非常に小さな宇宙が凝縮した状態)} \end{array}$$

しかし、この相転移に関する数学的な構造の解はまだ。

- 時間が誕生する前の世界

- ✓ そこは物理学ではなく、数学の世界
- ✓ そこには数学の理論の数だけの世界がある
- ✓ 生命が誕生するような数学の理論だけが現実となる
 - ➔ 世界は数学という言葉で記述される。

c. 弦理論との関係 (兆候)

- 現実世界の理論になるには, Lorentz対称性が必要
- $c=26$ の物質場を加えている
- 16次元トーラスのコンパクト空間が現れる
- 理論から得られる修正Friedmann方程式が
物質場エネルギーとハッブルパラメーターの交換 $\mathcal{H} \leftrightarrow H$
の下で不変