

Jánossy 密度, 隣接準位間隔比の分布, Riemann ζ 零点

西垣 真祐 [島根大]

SMN PTEP(2024)081A01* = 2407.15704

SMN PTEP(2021)113A01 = 2109.00790

*JPS Hot Topics/PTEP の最近の注目論文から 2024/12

離散的手法による場と時空のダイナミクス **2024**

2024.9.2~5 東京工業大

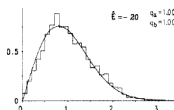
- 1 Introduction : ランダム行列
- 2 Jánosy密度とTracy-Widom法
- 3 隣接準位間隔比の分布
- 4 Riemann ζ 関数零点

① Introduction : ランダム行列

ランダム行列 $H = (H_{ij})$ 乱数

量子カオス系の準位統計

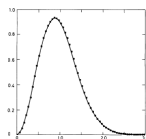
- ・ Gutzwiller跡公式



$N \rightarrow \infty$
 行列積分

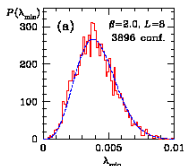
数論的量子カオス

- ・ Selberg跡公式
- ・ L 関数零点統計



南部-Goldstoneボソンの有効ポテンシャル on G/H

- ・ QCD Dirac準位



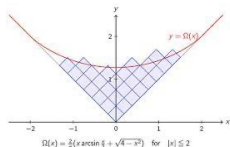
量子的時空の創発

- ・ ランダム面/非臨界弦
- ・ IKKT行列模型
- ・ SYK模型, ...



組合せ論

- ・ 最長増加部分列
- ・ 2D, 3D tiling, ...



固有値分布

$u(N)$ の Haar 測度 \rightarrow 固有値の JPD

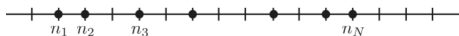
$$\begin{aligned}
 \text{JPD}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) &= \prod_i w(\lambda_i) \cdot \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad H = U^\dagger \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})U \\
 &= \prod_i w(\lambda_i) \cdot \det[\lambda_i^k] \cdot \det[\lambda_j^k] \quad : \text{VdM 行列式} \\
 &= \det[\varphi_k(\lambda_i)] \cdot \det[\varphi_k(\lambda_j)] \quad : \text{直交関数 } (\varphi_k, \varphi_\ell) = \langle k|\ell \rangle \\
 &= \det \left[\sum_{k < N} \varphi_k(\lambda_i) \varphi_k(\lambda_j) \right] \quad : \text{射影演算子 } \mathbf{K} = \sum_{k < N} |k\rangle \langle k| \\
 &\stackrel{\text{3項漸化式}}{\propto} \det \underbrace{\left[\frac{\varphi_N(\lambda_i) \varphi_{N-1}(\lambda_j) - \varphi_{N-1}(\lambda_i) \varphi_N(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right]_{i,j=0}^{N-1}}_{K(\lambda_i, \lambda_j)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_p(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) = \det[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=0}^{p-1} \quad \text{by 射影性 } \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K}, \text{ tr } \mathbf{K} = N$$

行列式点過程 (連続的 DPP)

Gap 確率

離散的 DPP



$$\text{Prob}(n_1, \dots, n_p \text{に粒子あり}) = \det[K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^p$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Prob}(n \text{に粒子がない}) = 1 - K(n, n)$$

n と n' に粒子がある引き過ぎを補正

$$\text{Prob}(n, n' \text{に粒子がない}) = 1 - K(n, n) - K(n', n') + \overbrace{\begin{vmatrix} K(n, n) & K(n, n') \\ K(n', n) & K(n', n') \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - K(n, n) & -K(n, n') \\ -K(n', n) & 1 - K(n', n') \end{vmatrix}$$

$$\text{Prob}(n, n', n'' \text{に粒子がない}) = \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Prob}(\text{集合 } I \text{に粒子がない}) = \det(\mathbb{I} - [K(n, n')]_{n, n' \in I})$$

Gap 確率 as Fredholm Det

連続的 DPP

$$E_0(I) = \text{Prob}(\text{区間 } I \text{ に粒子がない}) = \text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I)$$

$$\mathbf{K}|_I : \text{積分演算子} \quad (\mathbf{K}|_I f)(x) = \int_I dy K(x, y) f(y)$$

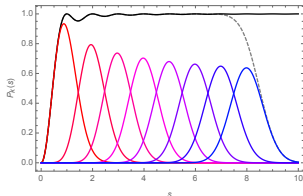
$\varphi_N(\lambda)$ 局所漸近形 \rightarrow $\sin x, \cos x$ bulk, $\text{Ai}(x)$ 自由端近傍, $J_\nu(\sqrt{x})$ 固定端近傍

神保-三輪-毛利-佐藤 1980: バンド内部 $\mathbf{K}_{\text{Sin}}|_{(-\frac{s}{2}, \frac{s}{2})} \Rightarrow \text{Painlevé V}$ for $\partial_s \log E_0$

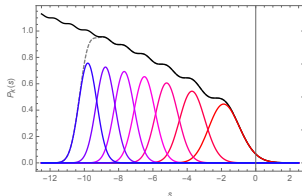
Tracy-Widom 1993: バンド端 $\mathbf{K}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)} \Rightarrow \text{Painlevé II}$ for $\partial_s^2 \log E_0$

Tracy-Widom 1993: 鏡像点近傍 $\mathbf{K}_{\text{Bessel}}|_{(0, s)} \Rightarrow \text{Painlevé III}'$

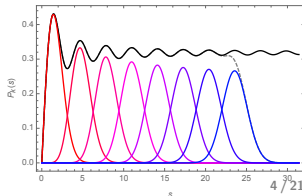
固有値間隔分布



最大固有値分布 (TW 分布)



最小固有値分布

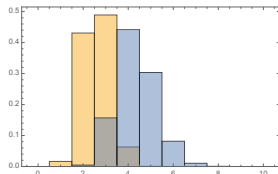
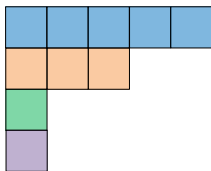


邂逅 1 : Ulam 問題

対称群 \mathfrak{S}_N の k 次最長増加部分列 = **Young tableaux** の第 k 行の長さ の分布を求めよ

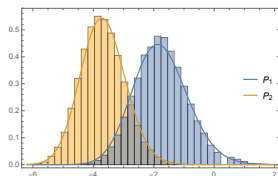
答 : **TW 分布** Baik-Deift-Johansson 1999,2000; Borodin-Okounkov-Olshanski 1999; Johansson 1999
 Okounkov 2000 (Fields 賞) : 行列積分 \Rightarrow 点付き Riemann 面の単体分割 \Rightarrow 被覆の monodromy $\leftarrow \mathfrak{S}_N$

6 1 7 0 2 3 9 5 8 4



$N = 10$, #perm = $10! \approx 3M$

$N \gg 1 \downarrow$ TW 分布

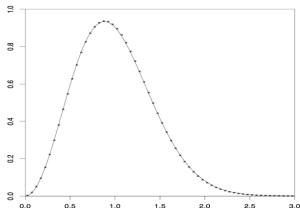


$N = 8096$, #sample = 30000

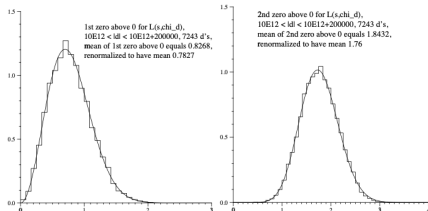
邂逅 2 : $L(s, \chi)$ 関数 $= \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$

- Hilbert-Pólya 予想 1912 : $\zeta(\frac{1}{2} + it) \stackrel{?}{=} \text{“det}(\mathbb{I} - t^{-1}\hat{H})\text{”}$ s.t. $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ **スペクトル解釈**
 \Rightarrow 類例探索 : Selberg ζ , Ihara ζ , Gutzwiller 跡公式, ...
- Montgomery-Odlyzko 予想 1972 : \hat{H} は “quantum chaotic”, i.e.
 $\zeta(s)$ の **bulk 零点のスペクトル平均** \Leftrightarrow bulk 固有値の Haar 平均 $U(\infty)$
- Katz-Sarnak 定理 1997 : $L(\frac{1}{2} + it, \chi_d)$ d について平均 $\langle \text{det}(\mathbb{I} - e^{-it}U) \rangle_{U\text{Sp}(\infty)}$
 $L(s, \chi)$ の **最小零点のアンサンブル平均** \Leftrightarrow 最小固有値の Haar 平均

$\zeta(s)$ の零点間隔分布 $N \simeq 10^{16}$



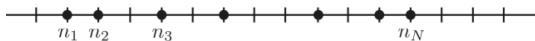
$L(s, \chi_d)$ の第 1, 2 零点の分布 $|d| \simeq 10^{12}$



② Jánosy密度とTracy-Widom法

行列式点過程

離散的 DPP



N 個の fermion の確率分布: $P(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{N!} \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^N$

with 射影核: $\mathbf{K} = [K(n, n')]_{n,n'} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{tr} \mathbf{K} = N$

↓

p 個の fermion の連結分布: $R_p(n_1, \dots, n_p) = \det [K(n_i, n_j)]_{i,j=1}^p$

I に粒子がない確率 = $\det(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_I), \quad \mathbf{K}|_I = [K(n, n')]_{n,n' \in I}$

全ての式は連続的 DPP に翻訳される

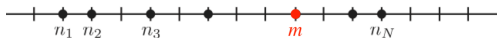
$R_p(\{n\}) \rightarrow R_p(\{x\})dx_1 \cdots dx_p, \quad \det \rightarrow \text{Det}$

⇒ 離散的 DPP で説明を簡単化

条件つき確率

1つの粒子を点 m に固定: 'conditioned' 核

$$\tilde{K}(n, n') := K(n, n') - \frac{K(n, m)K(m, n')}{K(m, m)}$$



- 他の粒子は m を避ける: $\tilde{K}(n, m) = \tilde{K}(m, n') = 0$
- 射影性, 規格化を満たす: $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{K}(n, n')] = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}, \quad \text{tr } \tilde{\mathbf{K}} = N - 1$
- 条件つき連結分布 (m は占有済) に対する核になる:

$$\tilde{R}_1(n|m) = \frac{R_2(n, m)}{R_1(m)} = \frac{K(n, n)K(m, m) - K(n, m)K(m, n)}{K(m, m)} = \tilde{K}(n, n)$$

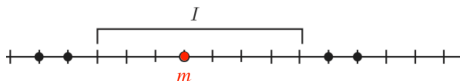
$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(n_1, n_2|m) &= \frac{R_3(n_1, n_2, m)}{R_1(m)} \\ &= \frac{K(n_1, n_1)K(n_2, n_2)K(m, m) \pm (5 \text{ 項})}{K(m, m)} = \det [\tilde{K}(n_i, n_j)]_{i,j=1}^2, \text{ etc} \end{aligned}$$

Jánossy 密度

Lemma

部分集合 I が 1 個の粒子 @ m のみを含む条件付き確率は

$$\tilde{J}_1(I|m) = \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I), \quad \tilde{\mathbf{K}}|_I = \left[\tilde{K}(n, n') \right]_{n, n' \in I}$$

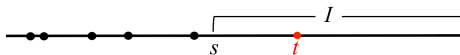


Jánossy 密度: I が 1 個の粒子 @ m のみを含む確率

$$J_1(I; m) = R_1(m) \cdot \det(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)$$

最大・2 番目の連結確率:

$$P_{1,2}(t, s) = J_1([s+1, \infty); t) - J_1([s, \infty); t) \simeq \partial_s J_1([s, \infty); t)$$



Tracy-Widom 法

Theorem (Tracy-Widom 1994)

- ① 核が integrable : $\mathbf{K} \doteq \frac{1}{x-y} [\varphi(x), -\psi(x)] \begin{bmatrix} \psi(y) \\ \varphi(y) \end{bmatrix} := \frac{\Psi(x)^T J \Psi(y)}{x-y} \quad (J^T = -J)$
- ② 2成分関数 $\Psi(x)$ が有理係数 1階 LDE を満たす : $(\partial_x + \mathcal{A}(x)) \Psi(x) = 0, \text{tr } \mathcal{A}(x) = 0$
 ならば, $\text{Det}(\mathbb{I} - \mathbf{K}|_{(a_1, a_2)})$ は $\mathcal{A}(x)$ の係数を含む PDE 系 in a_1, a_2 により決定される

Theorem (Nishigaki 2021)

核 \mathbf{K} が TW 法の適用可能条件を満たすならば, conditioned 核 $\tilde{\mathbf{K}}$ も満たす

Proof. 固定された点 t を避ける

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x) - \overbrace{\Psi(t) \frac{K(t, x)}{K(t, t)}} := U(x) \Psi(x) \Rightarrow U(x) = \mathbb{I} - \frac{\Psi(t) \Psi(t)^T J}{K(t, t)(t-x)} : \text{有理型 SL}(2) \text{ gauge 変換}$$

よって conditioned 核は $\tilde{\mathbf{K}} \doteq K(x, y) - \frac{K(x, t)K(t, y)}{K(t, t)} \stackrel{!}{=} \frac{\tilde{\Psi}(x)^T J \tilde{\Psi}(y)}{x-y}$ と表され,

$$(\partial_x + \tilde{\mathcal{A}}(x)) \tilde{\Psi}(x) = 0, \text{tr } \tilde{\mathcal{A}}(x) = \text{tr} \{U(x) \mathcal{A}(x) U(x)^{-1} - \partial_x U(x) \cdot U(x)^{-1}\} = 0 \quad \square$$

Tracy-Widom 法

具体的構成:

$$K(x, y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{x - y}, \quad m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ -C(x) & -A(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix}$$

↓

$$\tilde{K}(x, y) = \frac{\tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(y) - \tilde{\psi}(x)\tilde{\varphi}(y)}{x - y}, \quad m(x) \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\psi}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(x) & \tilde{B}(x) \\ -\tilde{C}(x) & -\tilde{A}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{\psi}(x) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{b(a\varphi(x) - b\psi(x))}{x - t} \quad a = \frac{\psi(t)}{\sqrt{K(t, t)}}, \quad b = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{K(t, t)}}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{a(a\varphi(x) - b\psi(x))}{x - t}$$

$$\tilde{A}(x) = A(x) + \frac{a^2 B(x) - b^2 C(x)}{x - t} - \frac{ab(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

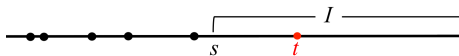
$$\tilde{B}(x) = B(x) - \frac{2b(bA(x) + aB(x))}{x - t} + \frac{b^2(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

$$\tilde{C}(x) = C(x) + \frac{2a(aA(x) + bC(x))}{x - t} + \frac{a^2(2abA(x) + a^2 B(x) + b^2 C(x) - m(x))}{(x - t)^2}$$

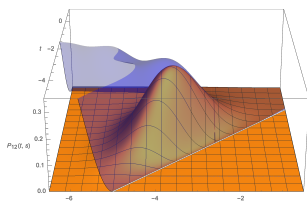
m, A, B, C は多項式 \Rightarrow 全体に $\times(x - t)^2$ すれば新たな $\tilde{m}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ も多項式 □

最大・第2固有値の連結分布

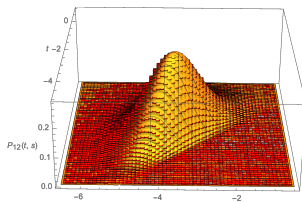
$\tilde{J}_1((s, \infty); t) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Airy}}|_{(s, \infty)})$ を TW 法で評価



連結分布: $P_{1,2}(t, s) = R_1(t) \cdot \partial_s \tilde{J}_1((s, \infty); t)$

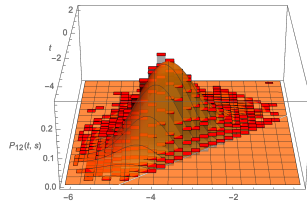


連結分布と 2 点相関関数



最大・第2固有値

$N = 128$



\mathfrak{S}_N の最長・第2増加部分列

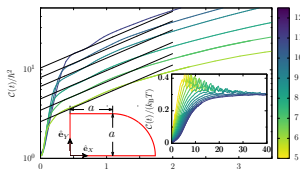
$N = 8096$

③ 隣接準位間隔比の分布

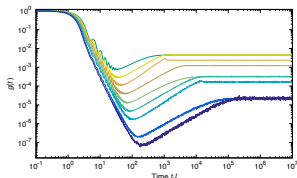
量子カオス性の判定

量子カオス = 古典的非可積分系の量子化 $|\Psi(t)\rangle = e^{-itH}|\Psi_0\rangle$ or $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

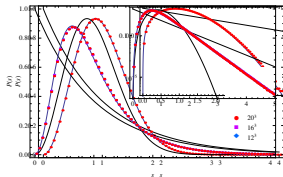
- 非時間順序積 $C(t) = \langle |[\hat{x}(t), \hat{p}(0)]|^2 \rangle$
- Krylov 複雑度 $C(t) = \sum_n n |\langle K_n | \Psi(t) \rangle|^2$, $\{|K_n\rangle\} = \{H^n |\Psi_0\rangle\}_{n=0}^\infty$ の GS 直交化
- 準位統計: Wigner \leftrightarrow Poisson as ETH \leftrightarrow MBL
 - ・ スペクトル形状因子 $g(t) = \int d\epsilon e^{i\epsilon t} R_2(E, E + \epsilon)$
 - ・ 準位間隔分布 $P(s)$, $s_n := \bar{\rho}(E_n)(E_{n+1} - E_n)$



Sinai ビリヤード: 非時間順序積
 García-Mata et al. 2022



SYK 模型: 形状因子
 Cotler et al. 2016



Anderson 模型: 準位間隔分布
 Nishigaki et al. 2013

量子カオス性の判定

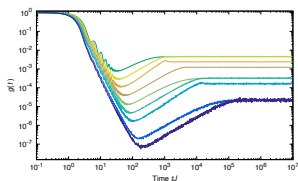
量子カオス = 古典的非可積分系の量子化 $|\Psi(t)\rangle = e^{-itH}|\Psi_0\rangle$ or $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

● 準位統計: Wigner ↔ Poisson as ETH ↔ MBL

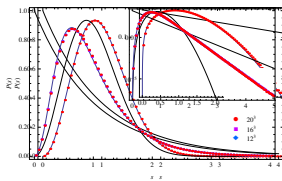
・ スペクトル形状因子 $g(t) = \int d\epsilon e^{i\epsilon t} R_2(E, E + \epsilon)$

・ 準位間隔分布 $P(s), s_n := \bar{\rho}(E_n)(E_{n+1} - E_n)$ ✓ 長所: unfolding 不要

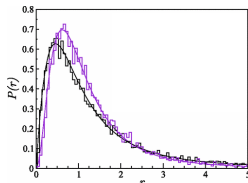
・ 隣接準位間隔比の分布 $P_r(r), r_n := \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}}$ or $\tilde{r}_n := \min(r_n, r_n^{-1}) \leq 1$



SYK 模型: 形状因子
 Cotler et al. 2016



Anderson 模型: 準位間隔分布
 Nishigaki et al. 2013



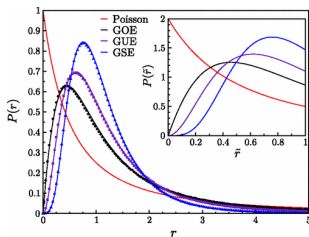
Ising 模型, ζ 零点: 準位間隔比分布
 Atas et al. 2013

隣接準位間隔比の分布

Atas-Bogomolny-Giraud-Roux 2013

Wigner 型 surmise 「Gaussian, $N \rightarrow \infty$ を $N = 3$ で代理」により近似形を導出

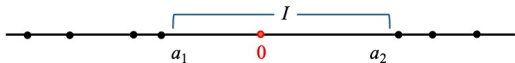
$$\begin{aligned} \text{JPD}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) &\propto e^{-\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} |(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)|^\beta \\ \Rightarrow P_r(r) &\propto \iiint_{\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2} d\lambda_0 d\lambda_1 d\lambda_2 \text{JPD}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \delta\left(r - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0}\right) \\ &\propto \frac{(r + r^2)^\beta}{(1 + r + r^2)^{1 + \frac{3}{2}\beta}} \\ \Rightarrow \langle \tilde{r} \rangle &= 0.5307, 0.5996, 0.6744 \quad (\beta = 1, 2, 4) \Rightarrow \text{被引用数} \simeq 1000 \end{aligned}$$



多くは ABGR の鬼粗い近似を “outcome of RMT” として引用 \Rightarrow 厳密に求めて引用数 Get!

Jánossy 密度 for $P_r(r)$

$J_1([a_1, a_2]; 0) = \text{Det}(\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Sin}}|_{[a_1, a_2]})$ を TW 法で評価

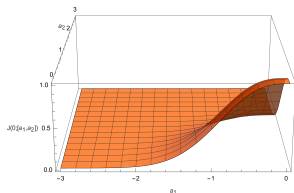


隣接準位間隔の連結分布

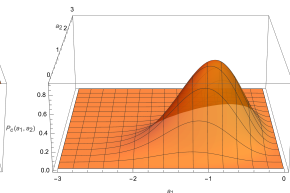
隣接準位間隔比の分布

\tilde{r}_n 比の期待値

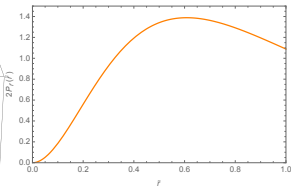
$$P_c(a_1, a_2) = -\frac{\partial^2 J_1([a_1, a_2]; 0)}{\partial a_1 \partial a_2} \Rightarrow P_r(r) = \int_0^\infty da a P_c(-ra, a) \Rightarrow \langle \tilde{r} \rangle = 0.5997504209..$$



$J_1([a_1, a_2]; 0)$



$P_c(a_1, a_2)$



$P_r(r)$

Jánossy 密度 for $P_r(r)$

具体形:

$J_1, q_{1,2}, p_{1,2}, U, V$ に対する PDE 系を $(a_1(s), a_2(s)) = (sa, sb)$, $s = 0^+ \rightarrow 1$ まで積分

$$s \frac{d}{ds} \log J_1([a_1, a_2]; 0) = a_1(q_1^2 + p_1^2) - a_2(q_2^2 + p_2^2) - (q_1 p_2 - p_1 q_2)^2 \\ + 2U(q_1 p_1 - q_2 p_2) - V(q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 + p_2^2)$$

$$s \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} q_j \\ p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V + a_j \\ V - a_j & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ p_j \end{bmatrix}$$

$$s \frac{dU}{ds} = -a_1(q_1^2 - p_1^2) + a_2(q_2^2 - p_2^2)$$

$$s \frac{dV}{ds} = -2a_1 q_1 p_1 + 2a_2 q_2 p_2$$

with 境界条件

[導出概略]

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \log \text{Det} (\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\chi_{[a_1, a_2]}}) = (-)^j \text{Tr} ((\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}_{\chi_{[a_1, a_2]}})^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \delta_{a_j}) = (-)^j ((\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)^{-1} \tilde{\mathbf{K}})(a_j, a_j) \\ \frac{\partial}{\partial a_j} p_k := \frac{\partial}{\partial a_j} ((\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)^{-1} \psi)(a_k) = \dots, \quad \frac{\partial}{\partial a_j} V := \frac{\partial}{\partial a_j} \int_I \psi (\mathbb{I} - \tilde{\mathbf{K}}|_I)^{-1} \varphi = \dots, \dots \text{ は閉じた系.}$$

4 Riemann ζ 関数零点

Riemann ζ 関数

Hilbert-Pólya 予想

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \stackrel{?}{=} \det(\mathbb{I} - x^{-1}H) \quad \text{s.t.} \quad H = H^\dagger$$

局所的: Montgomery-Odlyzko 予想 1972

Riemann-Mangoldt 公式で unfold した零点 $x_n = \bar{\rho}(\gamma_n)\gamma_n = \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \frac{\gamma_n}{2\pi}$ の局所相関関数は、 $n \rightarrow \infty$ 極限で $U(\infty)$ の固有値相関関数に一致

大域的: Keating-Snaith 予想 2000

ζ 関数の moments は、 $U(N)$ の特性多項式の moments と本質的に同一

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} = a_k \frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{k^2}$$

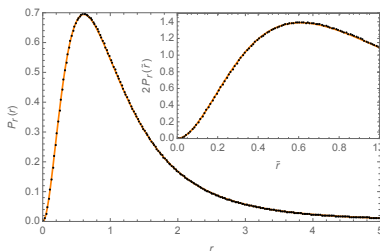
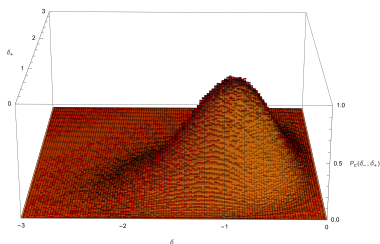
$$\Leftrightarrow \int_{U(N)} dU \left| \det(\mathbb{I} - U) \right|^{2k} = \frac{G(k+1)^2}{G(2k+1)} N^{k^2}$$

unfolding を要しない局所量 $r_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\gamma_n - \gamma_{n-1}}$ の分布 $\stackrel{?}{\rightarrow} U(\infty)$ の隣接固有値間隔比の分布 (Atas et al. 2013) を精密化したい

と関数零点統計

LMFDB (www.lmfdb.org) から各ウィンドウ $n \in [N, 1.001N]$ 内の零点をダウンロード,
 隣接する零点間隔のヒストグラム, \tilde{r}_n 比を計算

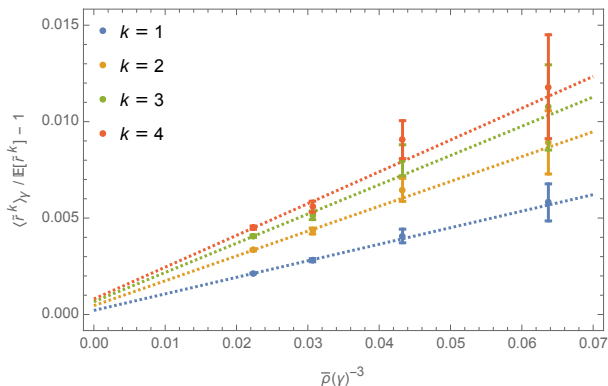
N	γ_N	$\langle \tilde{r}_n \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^2 \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^3 \rangle$	$\langle \tilde{r}_n^4 \rangle$
10^8	$4.265354 \cdot 10^7$.6032357	.4168926	.3133507	.2489623
10^9	$3.718702 \cdot 10^8$.6021928	.4158748	.3125019	.2482868
10^{10}	$3.293531 \cdot 10^9$.6014386	.4149925	.3116161	.2474310
10^{11}	$3.058187 \cdot 10^{10}$.6010277	.4145862	.3112812	.2471641
	RM	.5997504	.4132049	.3100223	.2460560



隣接零点間隔 (unfolded) の連結分布 [肉眼では RM と完全一致] 隣接零点間隔比の分布

ζ関数零点統計

$\langle \tilde{r}^k \rangle$ の相対誤差



$\langle \tilde{r}^k \rangle$ の相対誤差は $\bar{\rho}(\gamma)^3$ に反比例して 0 に収斂

要約

- TW 条件 : 有理型 $sl(2)$ 接続に対する共変的定数切断 $(\partial_x + \mathcal{A}(x))\Psi(x) = 0$
- 固有値の固定 $\mathbf{K} \doteq \frac{\Psi(x)^T J \Psi(y)}{x - y} \mapsto \tilde{\mathbf{K}} \doteq \frac{\tilde{\Psi}(x)^T J \tilde{\Psi}(y)}{x - y}$ は
 有理型 $SL(2)$ gauge 変換 $\Psi(x) \mapsto \tilde{\Psi}(x) = U(x)\Psi(x)$
- TW 条件は \mathbf{K} から $\tilde{\mathbf{K}}$ に遺伝. TW 法が Gap 確率に適用可なら Jánossy 密度にも可
- 準位統計による量子カオス性の判定には隣接準位間隔比の分布が有効
- Sine 核の Jánossy 密度 \sim 隣接準位間隔比の分布を TW ODE 系により解析的に決定
 Wigner surmise Go Home!
- Unfolding なしに, Riemann ζ 零点統計 $\xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty}$ GUE の普遍性への収束を定量化