

Numerical evidence for the CP-broken deconfined phase in 4D SU(2) Yang-Mills theory at $\theta = \pi$

松本 祥 (YITP, iTHEMS)

collaboration with

畠山 洸太 (京大), 平沢 光昭 (INFN Milano-Bicocca), 本多 正純 (iTHEMS),
西村 淳 (KEK, 総研大), Atis Yosprakob (新潟大)

離散的手法による場と時空のダイナミクス2024, 3 Sep. 2024 @東京工業大学



θ 項を含むゲージ理論

☆ トポロジカル θ 項 ... ゲージ理論のトポロジカルな性質を示す非摂動的効果

$$S_\theta = -i\theta Q = -\frac{i\theta}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \quad Z = \int dA e^{-S_g + i\theta Q}$$

- トポロジカルチャージ Q はコンパクトな空間では整数
- θ パラメーターの周期性: $\theta \sim \theta + 2\pi$
- Q は CP-odd であるため、 $\theta \neq 0$ では一般に CP 対称性を破る
- 中性子の電気双極子モーメントの測定から QCD では $|\theta| \lesssim 10^{-10}$ → 強い CP 問題

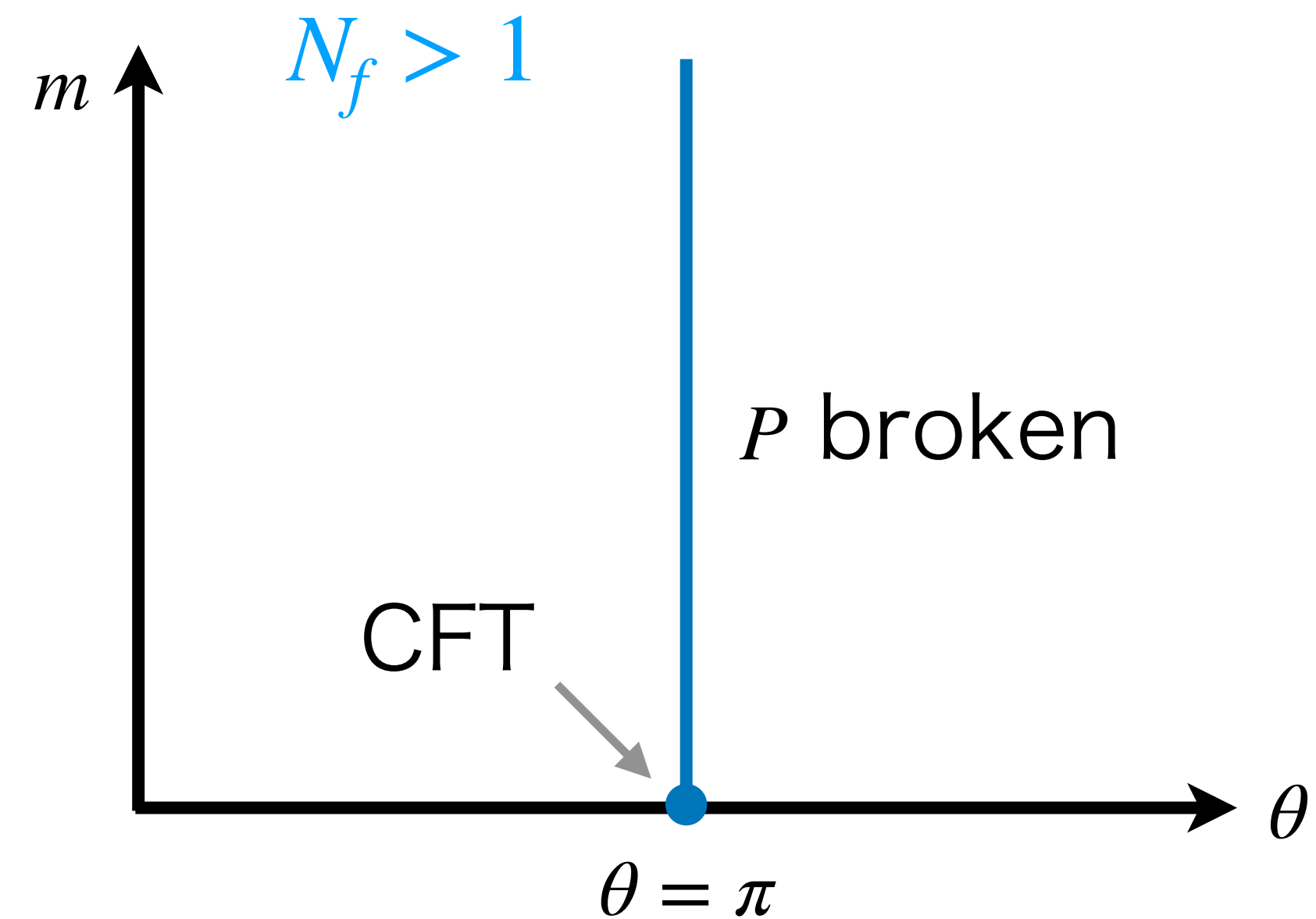
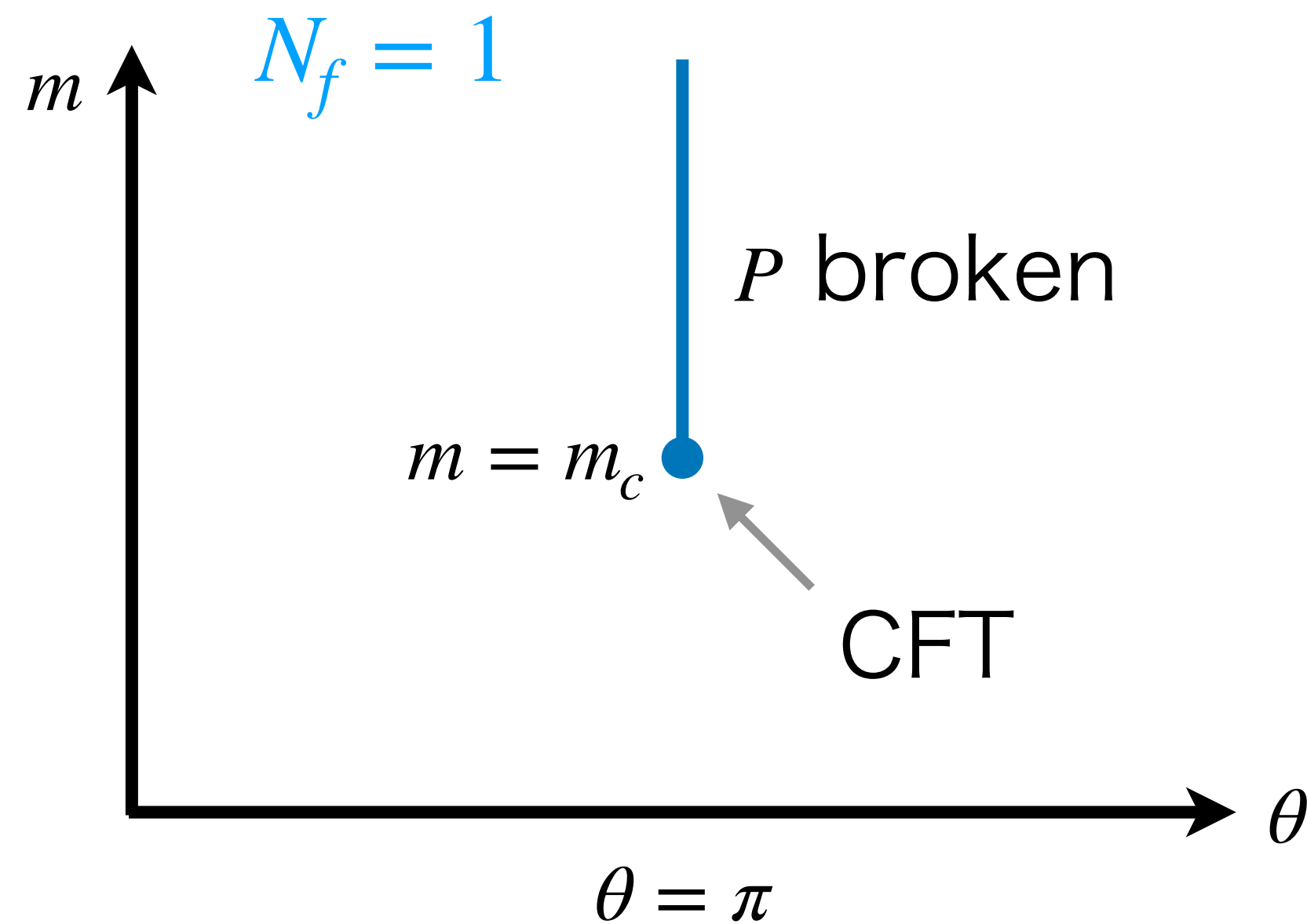
$\theta = \pi$ におけるCP対称性

- 周期性 $\theta \sim \theta + 2\pi$ により、 $\theta = \pi$ はCP対称性が現れる特別な点
- CP変換： $Z = \int dA e^{-S_g + i\theta Q} \rightarrow \int dA e^{-S_g - i\theta Q}$
- $\theta = \pi$ におけるCP対称性が自発的に破れることで、非自明な相構造が現れる
- θ 項を含む作用は複素であるため、符号問題によりモンテカルロ計算は困難
- 近年、higher form symmetry と 't Hooft anomaly を用いた研究が進展

2次元ゲージ理論での例(1)

N_f -flavor Schwinger模型 (2D QED) at $T = 0$

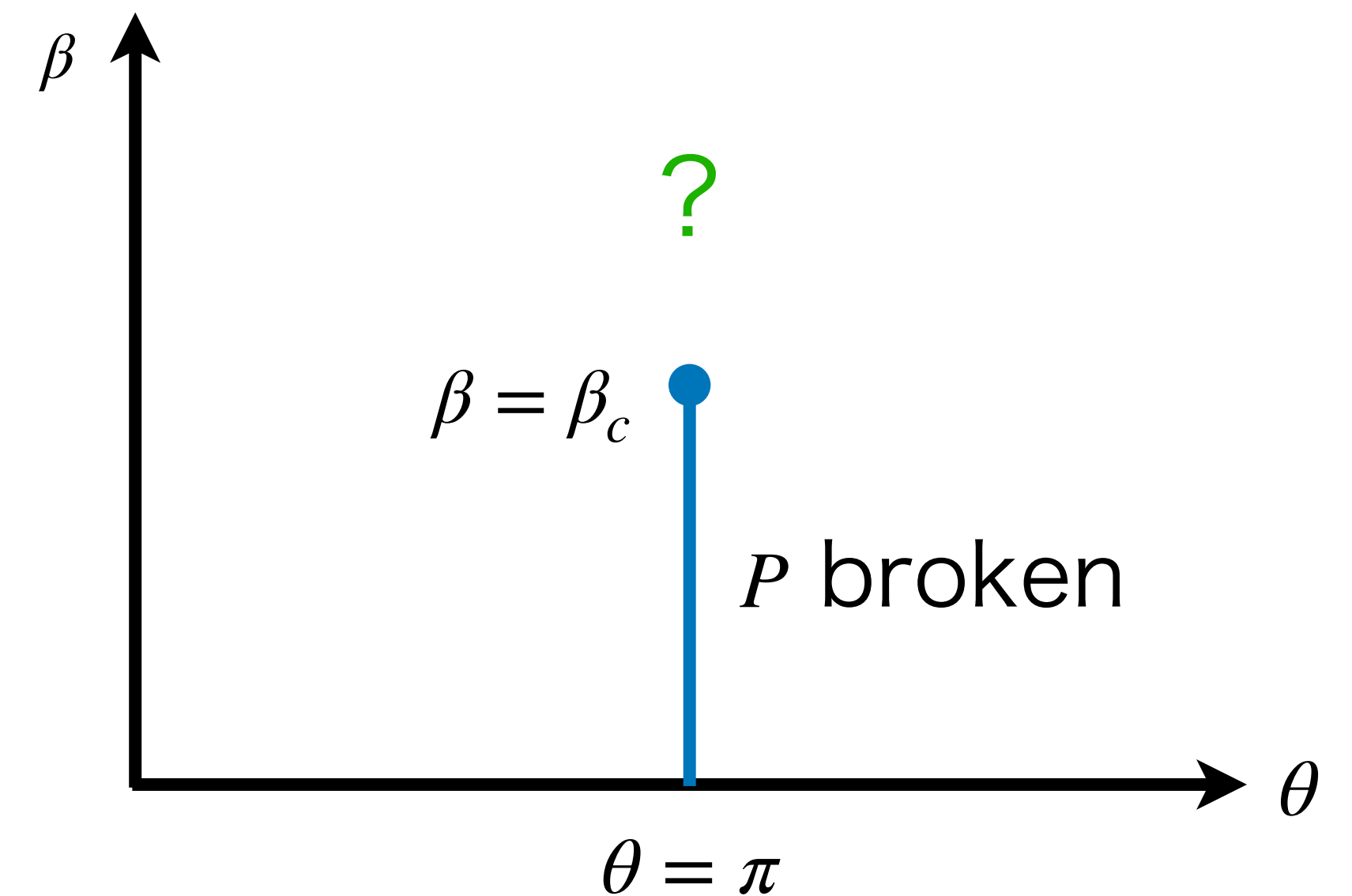
- ・ フレーバー数 N_f とフェルミオン質量 m によって $\theta = \pi$ での振る舞いが異なる
- ・ pure U(1)極限 $m \rightarrow \infty$ での自由エネルギー : $f \sim \min_n (\theta + 2\pi n)^2$ (multi-branched)



2次元ゲージ理論での例(2)

2D CP^1 模型 (nonlinear $O(3)$ sigma 模型) at $T = 0$

- スピン S の反強磁性Heisenbergスピン鎖の有効理論 $\longleftrightarrow \theta = 2\pi S$
- Haldane's conjecture : [\[Haldane \(1983\)\]](#)
 - $S = 1, 2, \dots \longleftrightarrow \theta = 0 \longleftrightarrow$ gapped system
 - $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \longleftrightarrow \theta = \pi \longleftrightarrow$ gapless system
- lattice CP^1 模型では coupling β に依存した相図がテンソルネットワークなどで調べられている

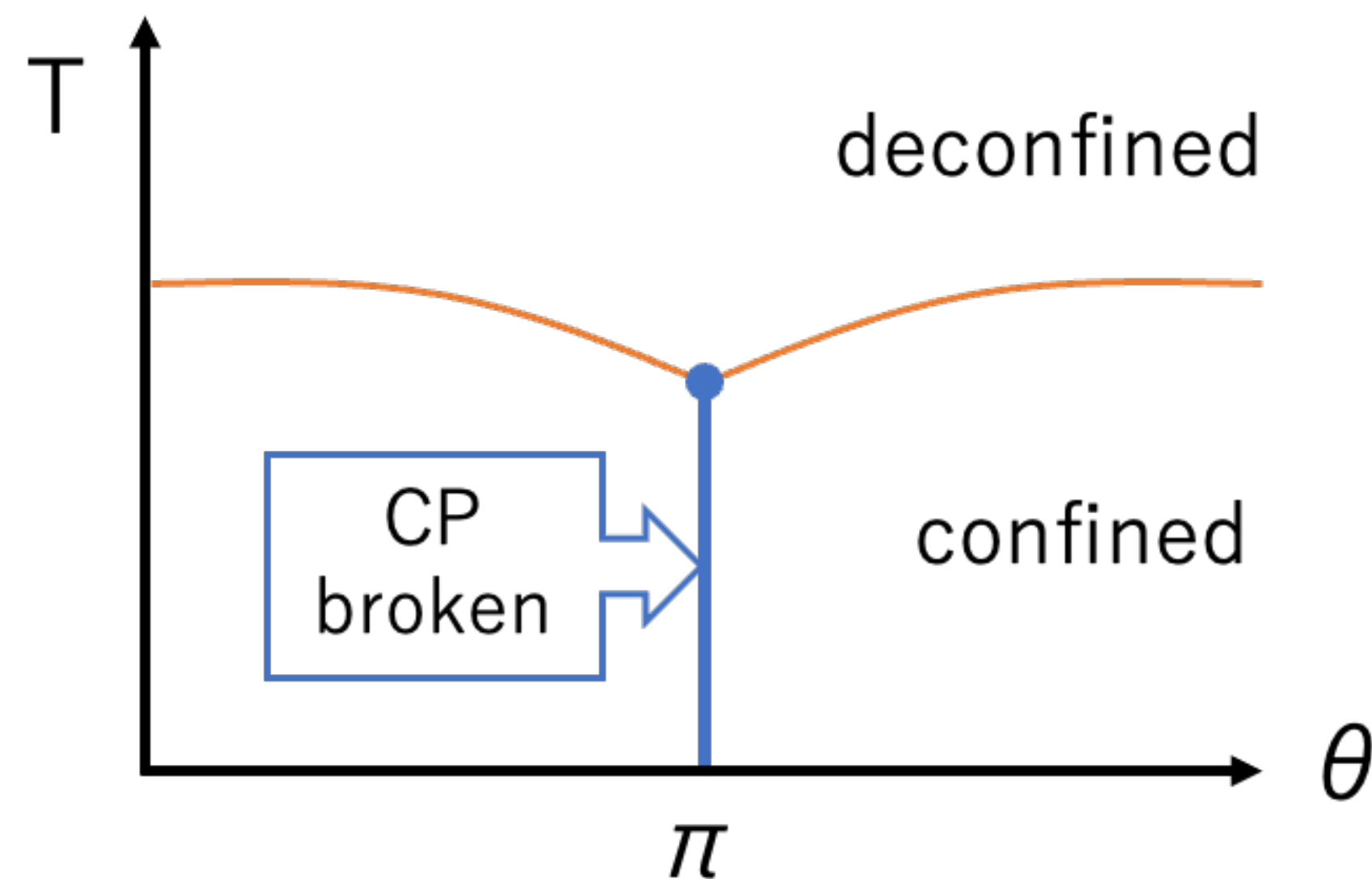


4次元のゲージ理論の場合

4D SU(N) pure Yang-Mills theory

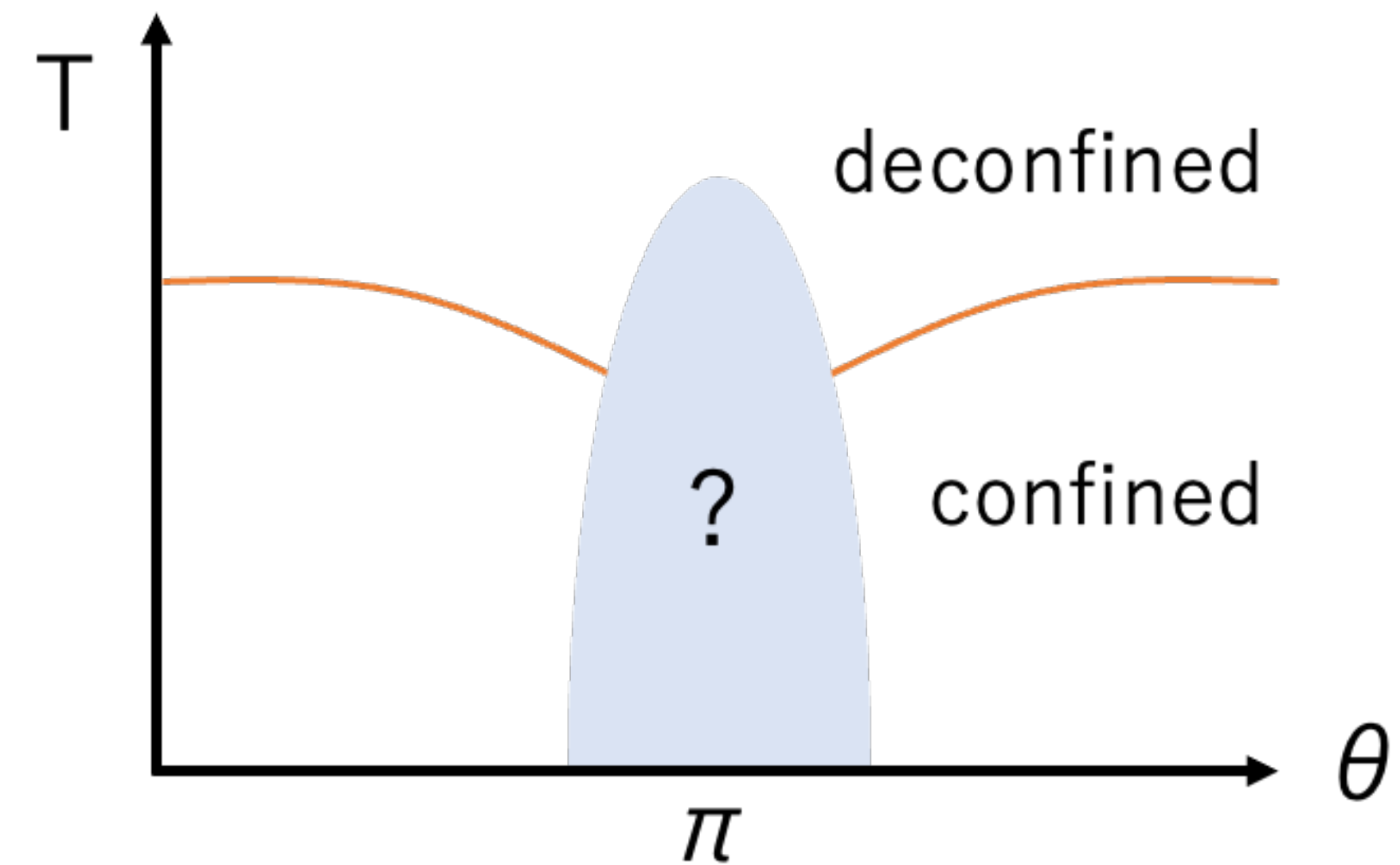
- Nが小さい場合の相構造はよくわかっていない

large N (holographic analysis)



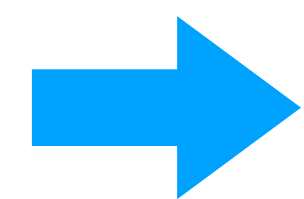
[Bigazzi et al. (2015)]

small N



Anomaly matchingによる相図への制限

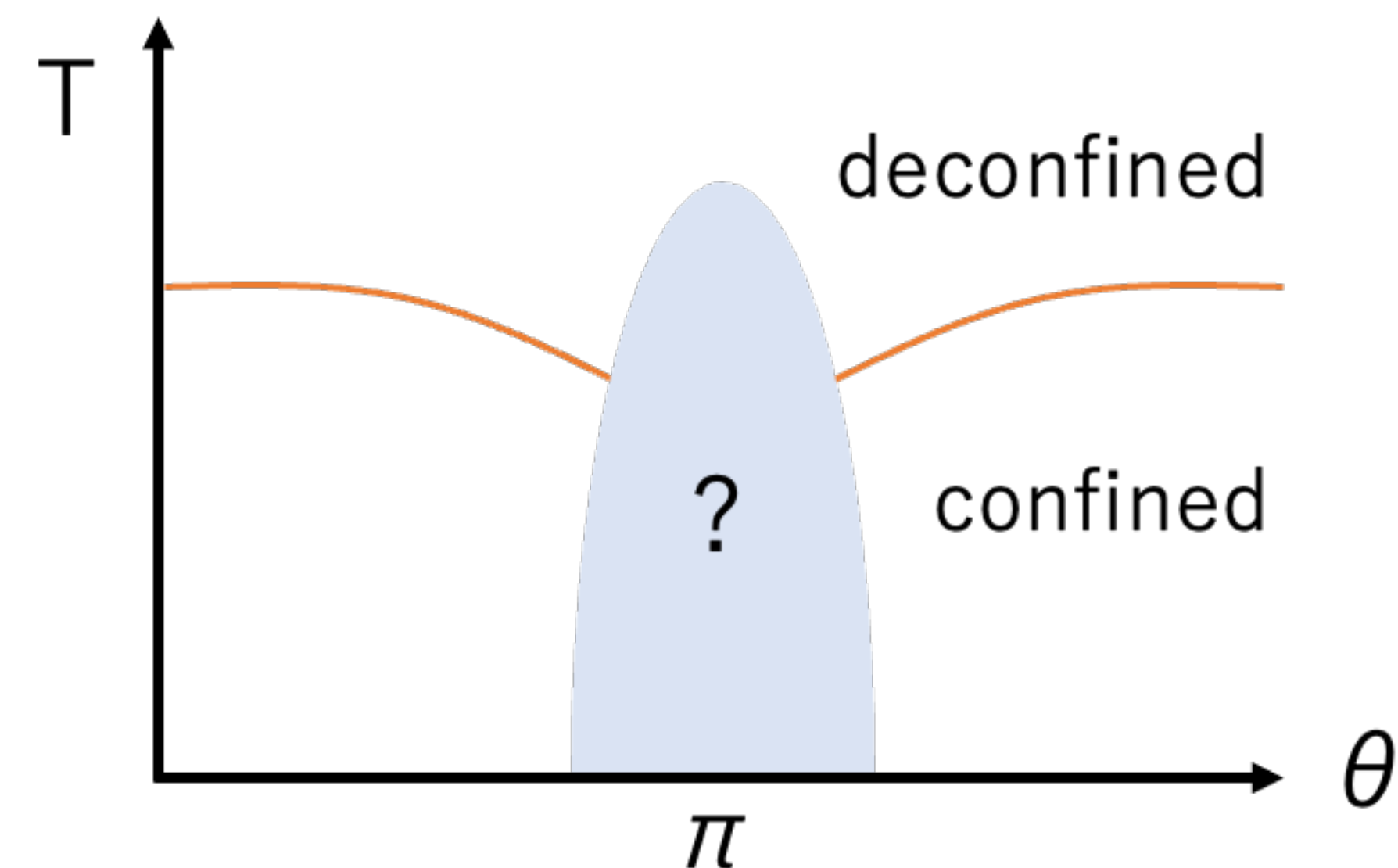
- 4D SU(N) YMの相構造は 't Hooft anomaly matchingにより制限できる
- $\theta = \pi$ におけるCP対称性と Z_N 1-form対称性の間に mixed 't Hooft anomaly が存在



- SSB of CP
- SSB of $Z_N^{(1)}$
- gapless phase (CFT)

- small N、特に $N = 2$ の場合の相図に制限を与えることが可能

[Gaiotto et al. (2017)] [Cordova & Ohmori (2019)]



$\theta = \pi$ において生じる相転移

- **高温領域** : CPが回復した非閉じ込め相 (CP symmetric & Z_2 broken) [Gross et al. (1981)]
[Weiss (1981)]
十分高温ではinstanton gas近似が有効 $f \sim 1 - \cos \theta$
- **低温領域** : CPの自発的破れ (CP broken & Z_2 ???)
subvolume法による数値解析 [Kitano et al. (2021)]
- **中間領域**では? : anomaly matchingによる制限(gappedであると仮定)
→ CPと Z_2 のうち少なくとも1つは破れていなければならない
→ CP対称な閉じ込め相は存在しない → $T_{\text{CP}} \geq T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$

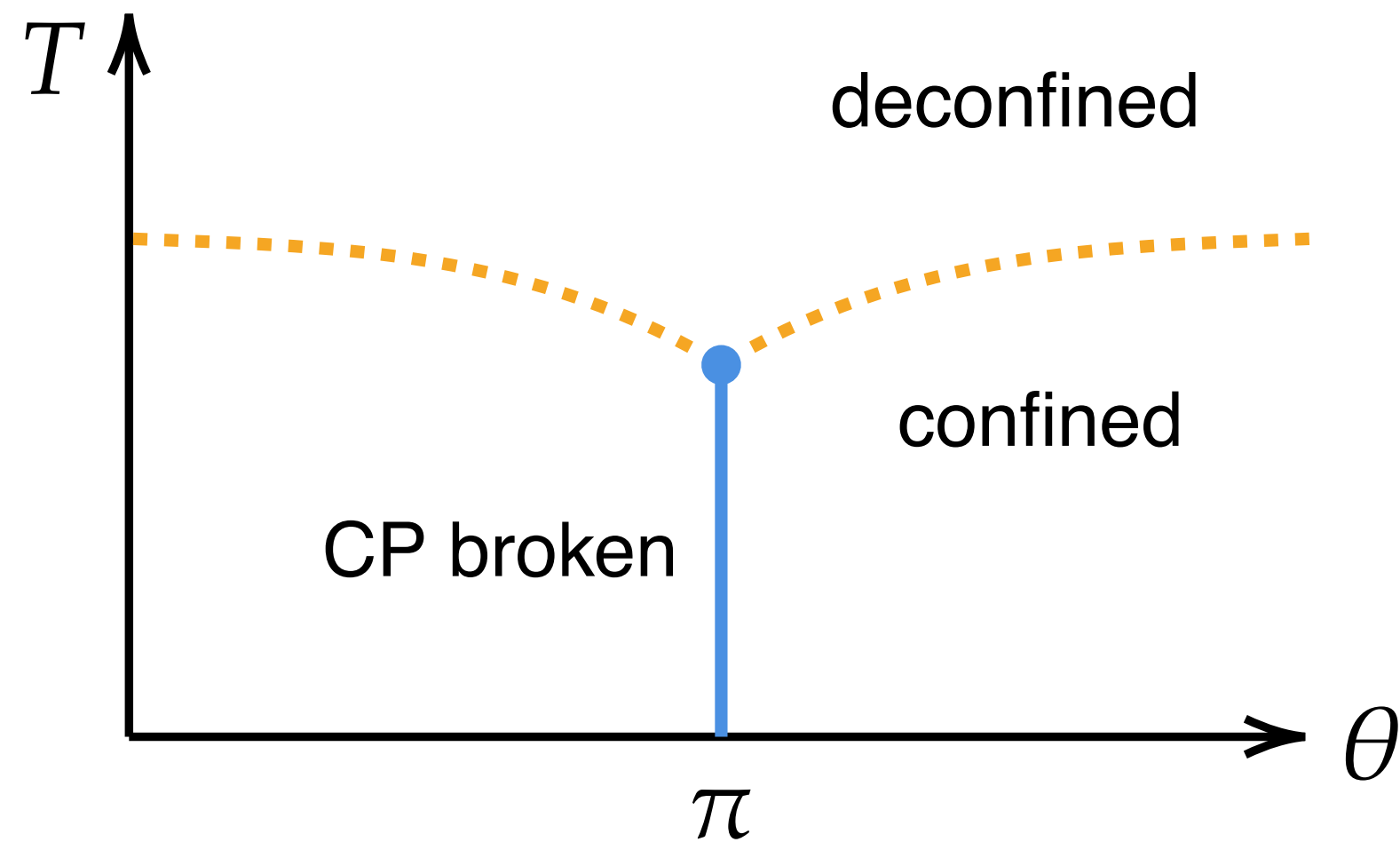
T_{CP} : $\theta = \pi$ でのCPが回復する温度

$T_{\text{dec}}(\theta)$: 閉じ込め相転移温度

4D SU(2) YMにおいて可能な相図の例

- anomaly matching 条件 $\rightarrow T_{\text{CP}} \geq T_{\text{dec}}$ at $\theta = \pi$

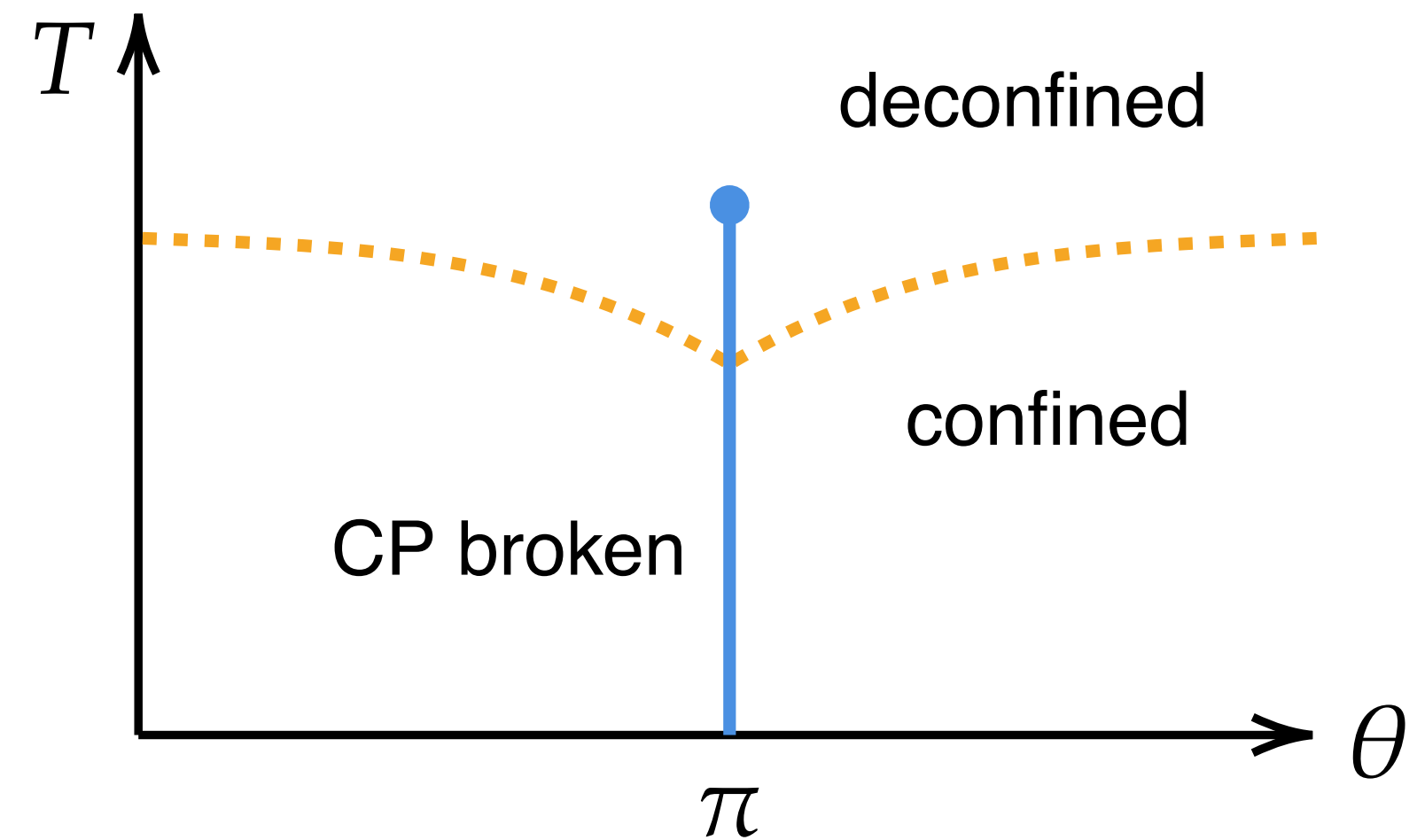
$$T_{\text{CP}} = T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$$



Large-N result by holographic analysis

[Bigazzi et al. (2015)]

$$T_{\text{CP}} > T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$$



SU(2) YM with softly broken SUSY

[Chenet et al. (2020)]

SU(2)において実現するのはどちらの相図か？

Short summary

- 4D SU(N) YMの $\theta = \pi$ におけるCP対称性と閉じ込め相転移の関係について、't Hooft anomaly matchingによる制限が与えられている
- θ 項に由来する符号問題のため、直接的なモンテカルロ計算は難しい
- 本研究ではimaginary θ を用いた解析により、CP対称性の温度変化を調べた
- その結果、 $T_{\text{CP}} > T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$ を示唆する結果が得られた
 - large Nとは異なるが、anomaly matchingとは無矛盾

Simulation results

1. Introduction

2. Method

3. Result

4. Summary

Simulation results

1. Introduction

2. Method

3. Result

4. Summary

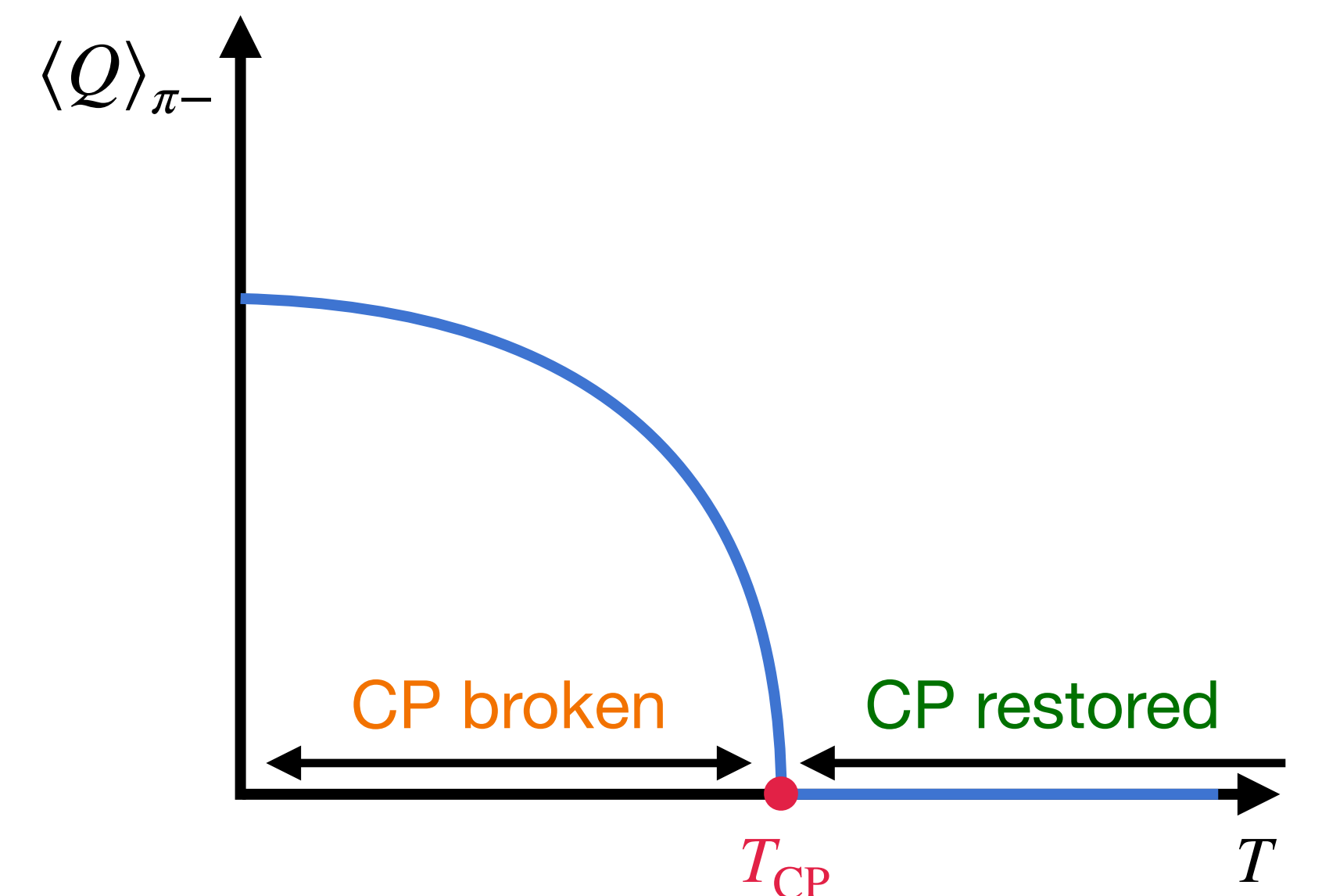
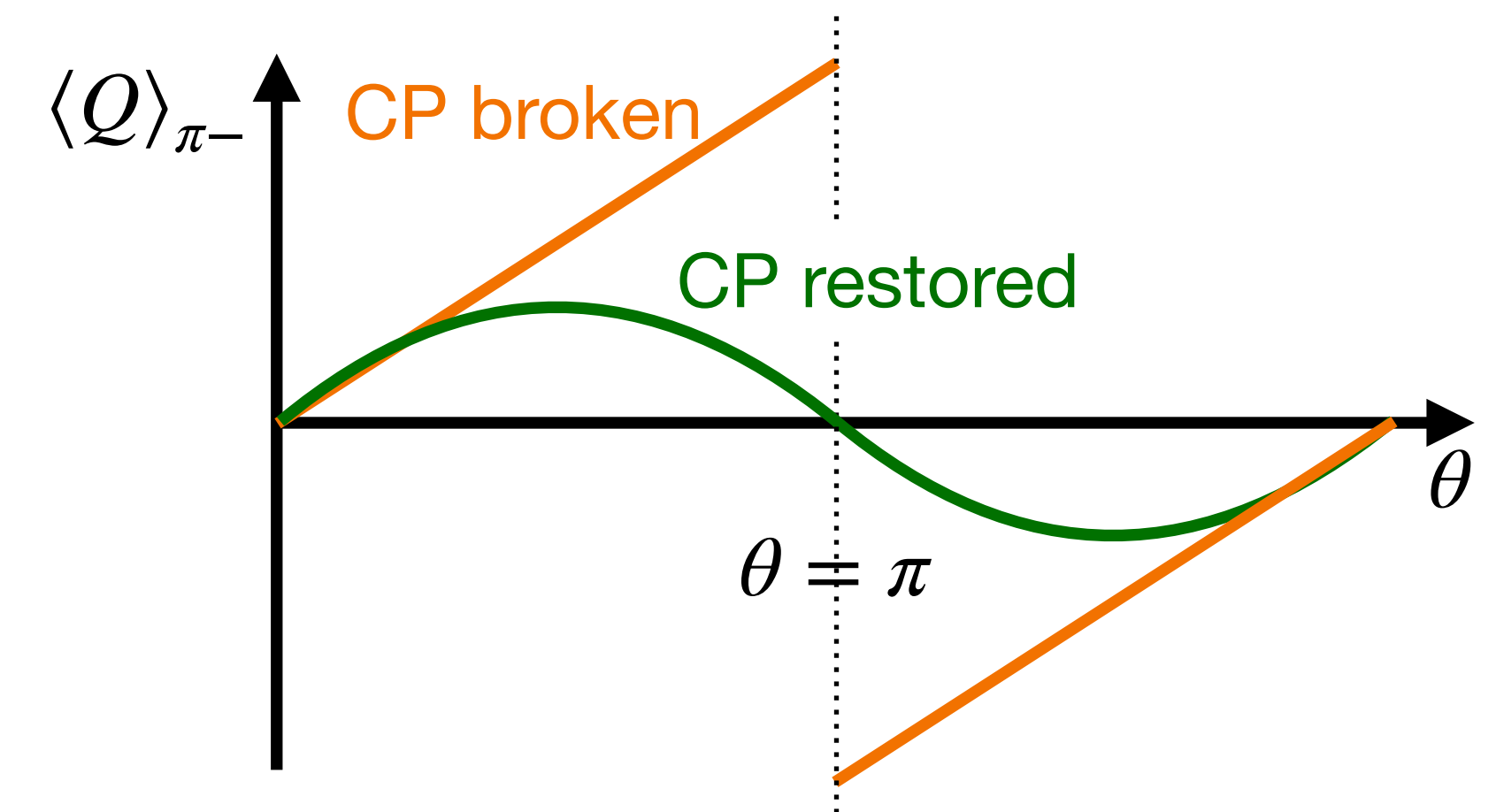
$\theta = \pi$ におけるCP対称性の破れ

- トポロジカルチャージ期待値は **CP-odd** なので、CPのオーダーパラメーターとなる

$$\langle Q \rangle_{\pi-} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle Q \rangle_{\theta=\pi-\epsilon} \begin{cases} \neq 0 & : \text{CP broken} \\ = 0 & : \text{CP restored} \end{cases}$$

- $\langle Q \rangle_{\pi-}$ の温度依存性から T_{CP} を決定

- しかし、 $\theta = \pi$ では符号問題が強いため、直接モンテカルロ法で計算することは困難
 → **imaginary θ** 模型を用いた解析



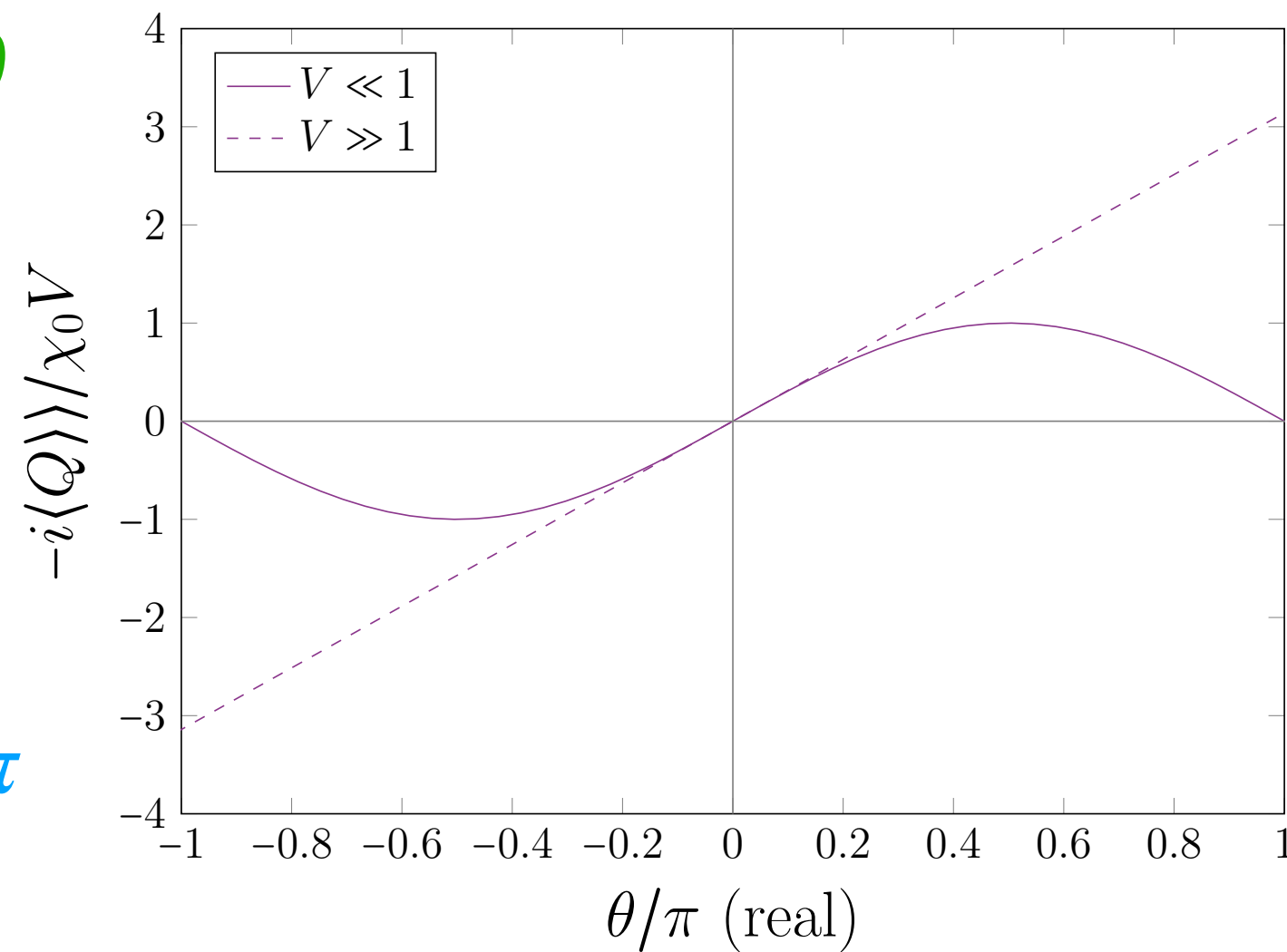
2D U(N)の場合

- 解析計算が可能な2次元の場合の例

limits	$\theta \in \mathbb{R}$	$\theta = i\tilde{\theta} \quad (\tilde{\theta} \in \mathbb{R})$	CP at $\theta = \pi$
$\frac{V}{\beta} \ll 1$	$i \sin \theta$	$\sinh \tilde{\theta}$	restored
$\frac{V}{\beta} \gg 1$	$i\theta$	$\tilde{\theta}$	broken

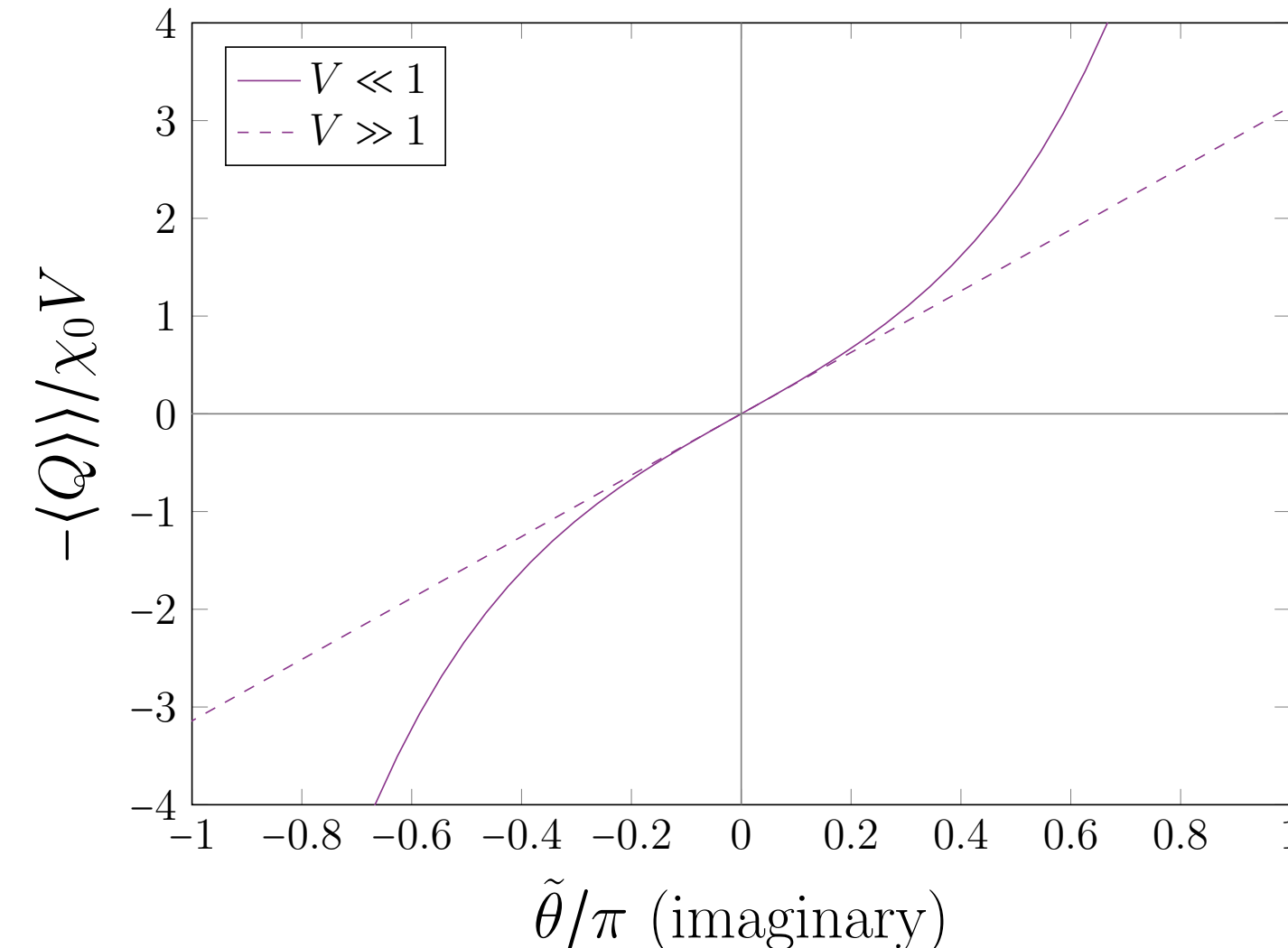
cf.) 4D SU(N) YMの高温領域
 \rightarrow instanton gas近似
 $\langle Q \rangle_\theta \propto i \sin \theta$ (CP restored)

real θ



$\langle Q \rangle / \chi_0 V_s$ vs θ/π

imaginary θ



$\langle Q \rangle / \chi_0 V_s$ vs $\tilde{\theta}/\pi$

θ の解析接続

- imaginary θ への置き換え $\theta \in \mathbb{R} \rightarrow i\tilde{\theta} \in i\mathbb{R}$ により、作用は実数となる

$$S = S_g + i\theta Q \longrightarrow S = S_g - \tilde{\theta} Q$$

- $\tilde{\theta}$ は(反)インスタントンの化学ポテンシャルのように働く

- **key idea :**

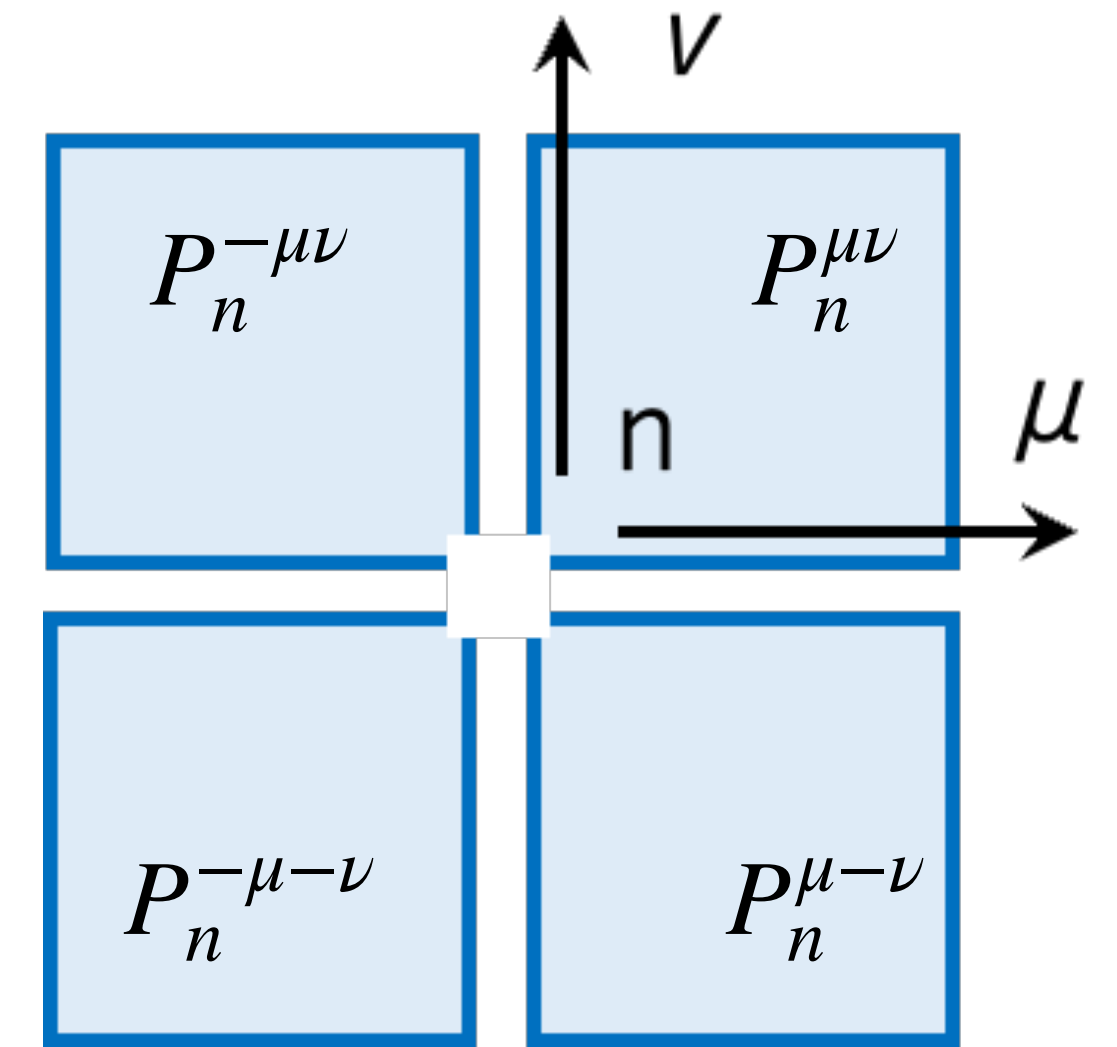
imaginary θ 領域でトポロジカルチャージ期待値 $\langle Q \rangle_{\tilde{\theta}}$ をモンテカルロ法で計算し、
解析接続により real θ 領域での $\langle Q \rangle_{\theta}$ を推定する

格子上的でのトポロジカルチャージ

- Naiveな離散化 (cloverleaf) [Di Vecchia et al. (1981)]

$$Q = -\frac{1}{32\pi^2} \sum_n \frac{1}{2^4} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma = \pm 1}^{\pm 4} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr} (\bar{P}_n^{\mu\nu} \bar{P}_n^{\rho\sigma})$$

$$\bar{P}_n^{\mu\nu} := P_n^{\mu\nu} - P_n^{-\mu\nu} - P_n^{\mu-\nu} + P_n^{-\mu-\nu}$$



- 有限格子サイズでは整数値にならず、「トポロジカル」ではない
 $\rightarrow \theta = \pi$ におけるCP対称性も現れない

cf.) 2次元の場合には格子上下でも整数となる定義が存在： $Q = -\frac{i}{2\pi} \sum_n \text{Tr} \log P_n$

Stout smearing

[Morningstar & Peardon (2004)]

- UV fluctuationを抑制して、トポロジカルな性質を回復させる
- ゲージ配位 $U_{n,\mu}$ を N_ρ 回アップデートして、smearされた配位 $\tilde{U}_{n,\mu}$ を得る

$$U = U^{(0)} \rightarrow U^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow U^{(N_\rho)} = \tilde{U}$$

- トポロジカルチャージはsmearされた配位で計算する： $Q[\tilde{U}]$

$$U_{n,\mu}^{(k+1)} = e^{iY_{n,\mu}} U_{n,\mu}^{(k)} \quad iY_{n,\mu} = -\frac{1}{2} \left(J_{n,\mu} - \frac{1}{2} \text{Tr} [J_{n,\mu}] \right)$$

$$J_{n,\mu} = \sum_{\nu(\neq\mu)} \rho_{\mu\nu} \left[U_{n,\mu} \left(\begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \text{---} \rightarrow \end{array} \right) \right] - \left[U_{n,\mu}^{-1} \left(\begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \rightarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \text{---} \rightarrow \end{array} \right) \right]$$

$\rho_{\mu\nu} = \rho$
ステップサイズ(対称)

Stout smearing + HMC

- 作用 $S = S_g[U] - \tilde{\theta}Q[\tilde{U}]$ に従ってHMCで配位生成を行う

- θ 項に含まれる相互作用は \tilde{U} についてlocalだが、 U についてはnon-local

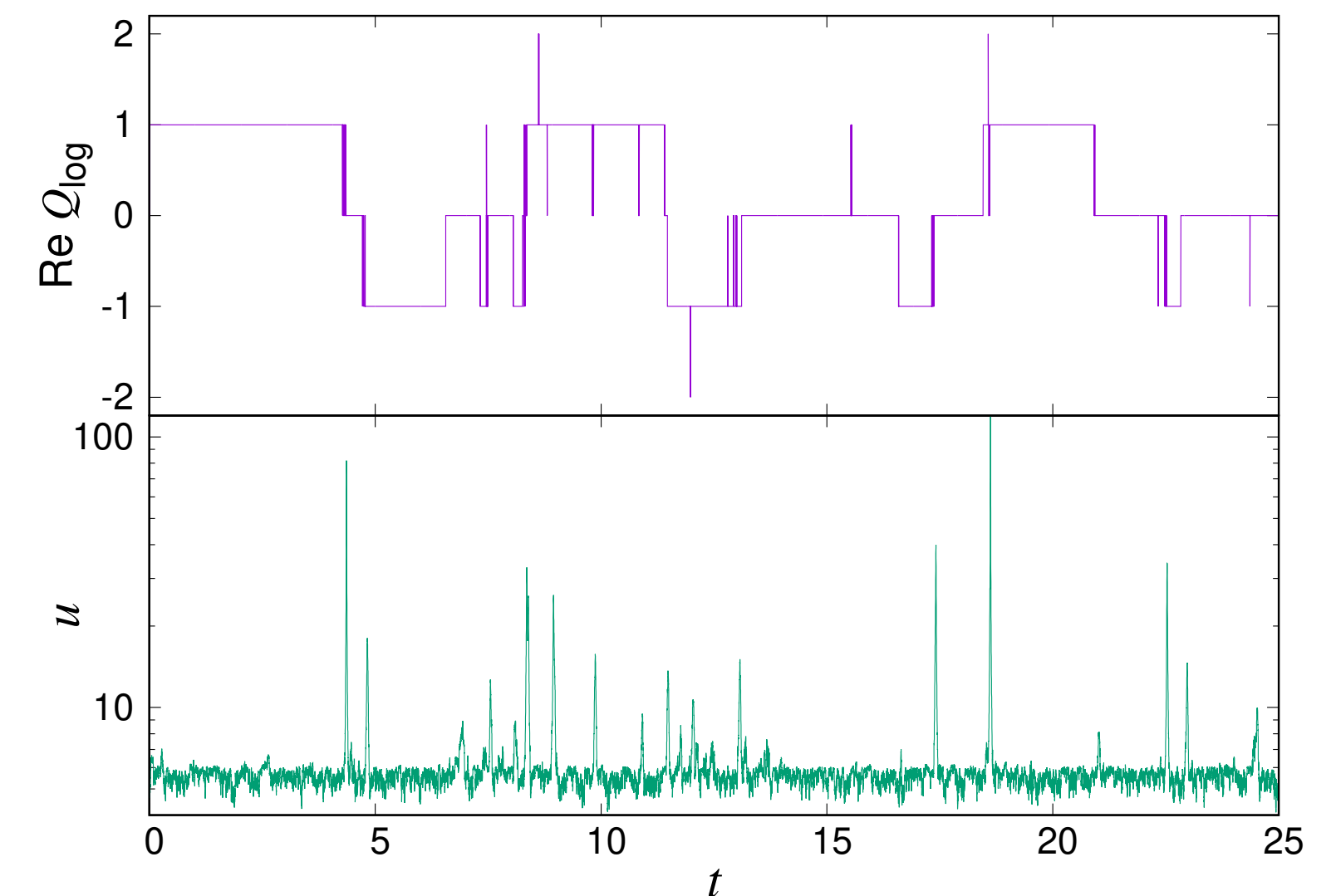
- HMCの各ステップで $F_{n,\mu} = \frac{\partial Q[\tilde{U}]}{\partial U_{n,\mu}}$ を逐次的に計算する

- $F_{n,\mu}^{(k)} := \frac{\partial Q[\tilde{U}]}{\partial U_{n,\mu}^{(k)}}$ についての chain rule $F_{n,\mu}^{(k)} = \sum_{m,\nu} \frac{\partial U_{m,\nu}^{(k+1)}}{\partial U_{n,\mu}^{(k)}} F_{m,\nu}^{(k+1)}$ を用いる

$\tilde{F} = F^{(N_\rho)} \rightarrow F^{(N_\rho-1)} \rightarrow \dots \rightarrow F^{(0)} = F$ (back propagation) cf.) \tilde{F} の計算は比較的容易

複素Langevin法について

- real θ で生じる符号問題を回避するため、複素Langevin法(CLM)も試みた
- stout smearing と back propagation は holomorphicな操作であるため、CLMにおいても実装可能
- しかし、トポロジーの変化によって強いドリフトが生じ、収束条件が満たされない
- 2次元の場合は開放端を導入することでこの問題を回避できたが、4次元の場合、開放端があるとsmearingによって非自明なトポロジーが残らない



[Hirasawa et al. (2020)]

Simulation results

1. Introduction

2. Method

3. Result

4. Summary

Stout smearingの効果

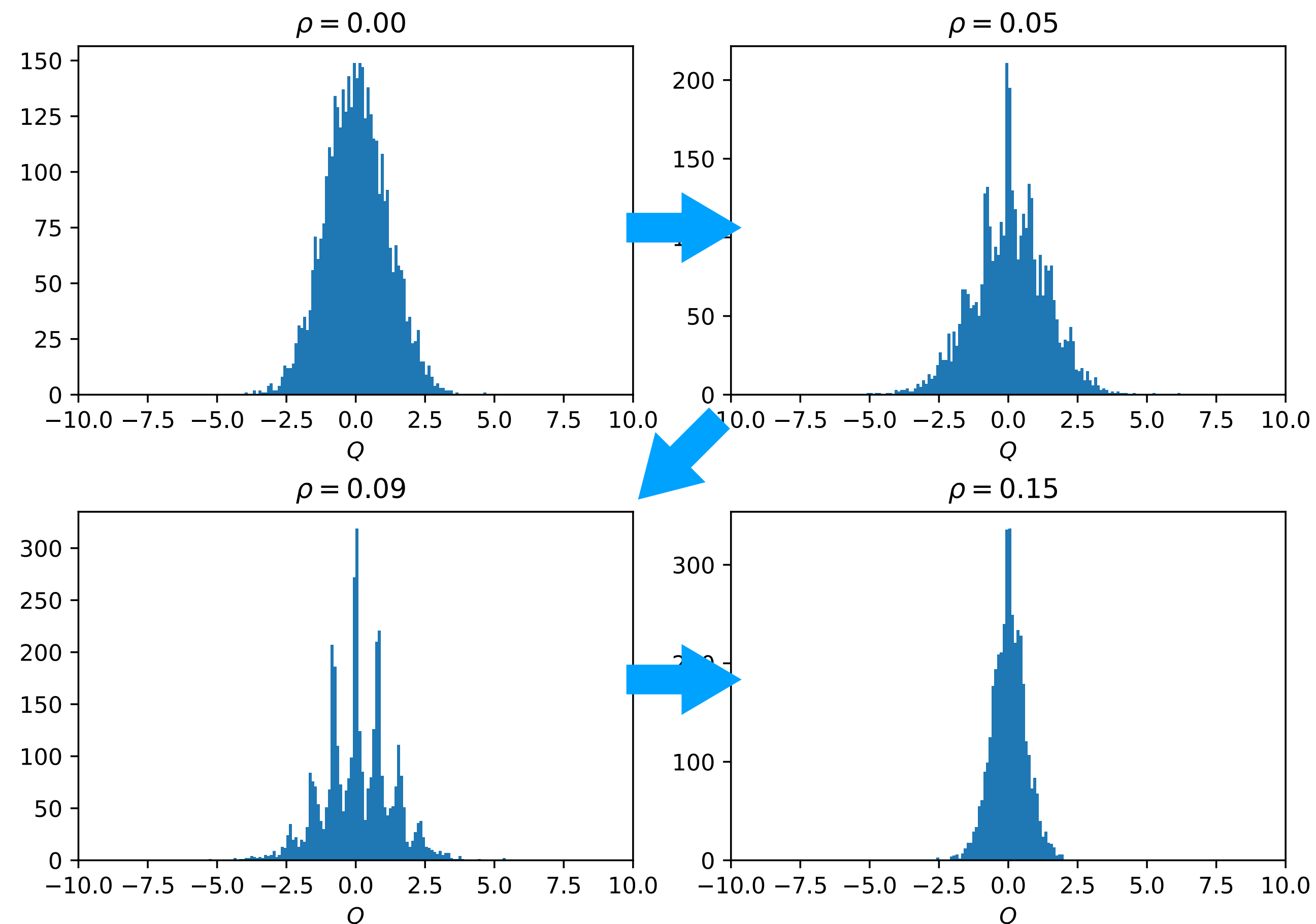
- ステップ幅 ρ とステップ数 N_ρ を調整し、トポロジカルチャージが離散的な値をとるようにする。

- 以降の結果では $\rho = 0.09$ と $N_\rho = 40$ に固定

cf.) 計算コスト： $O(VN_\rho)$

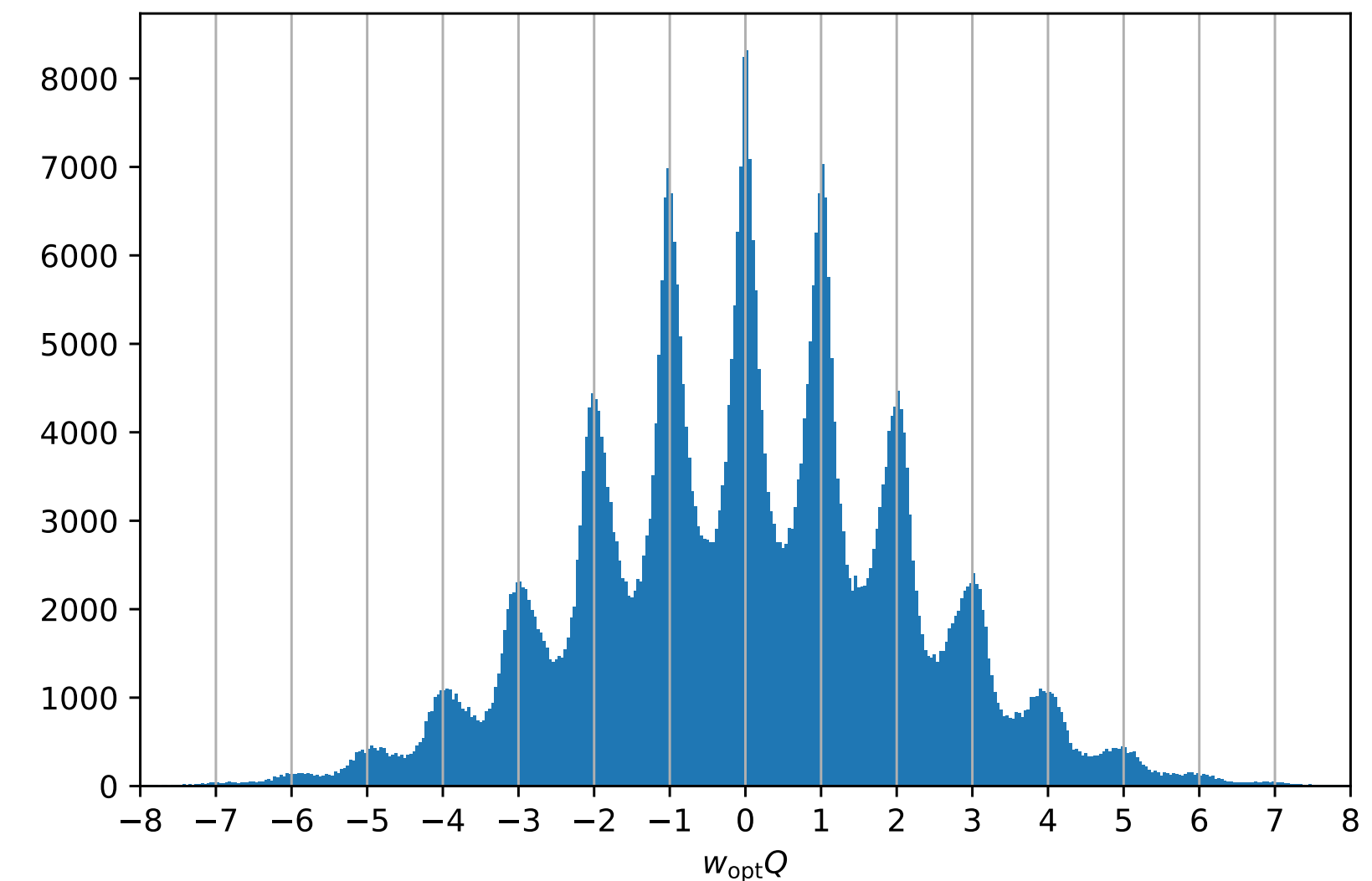
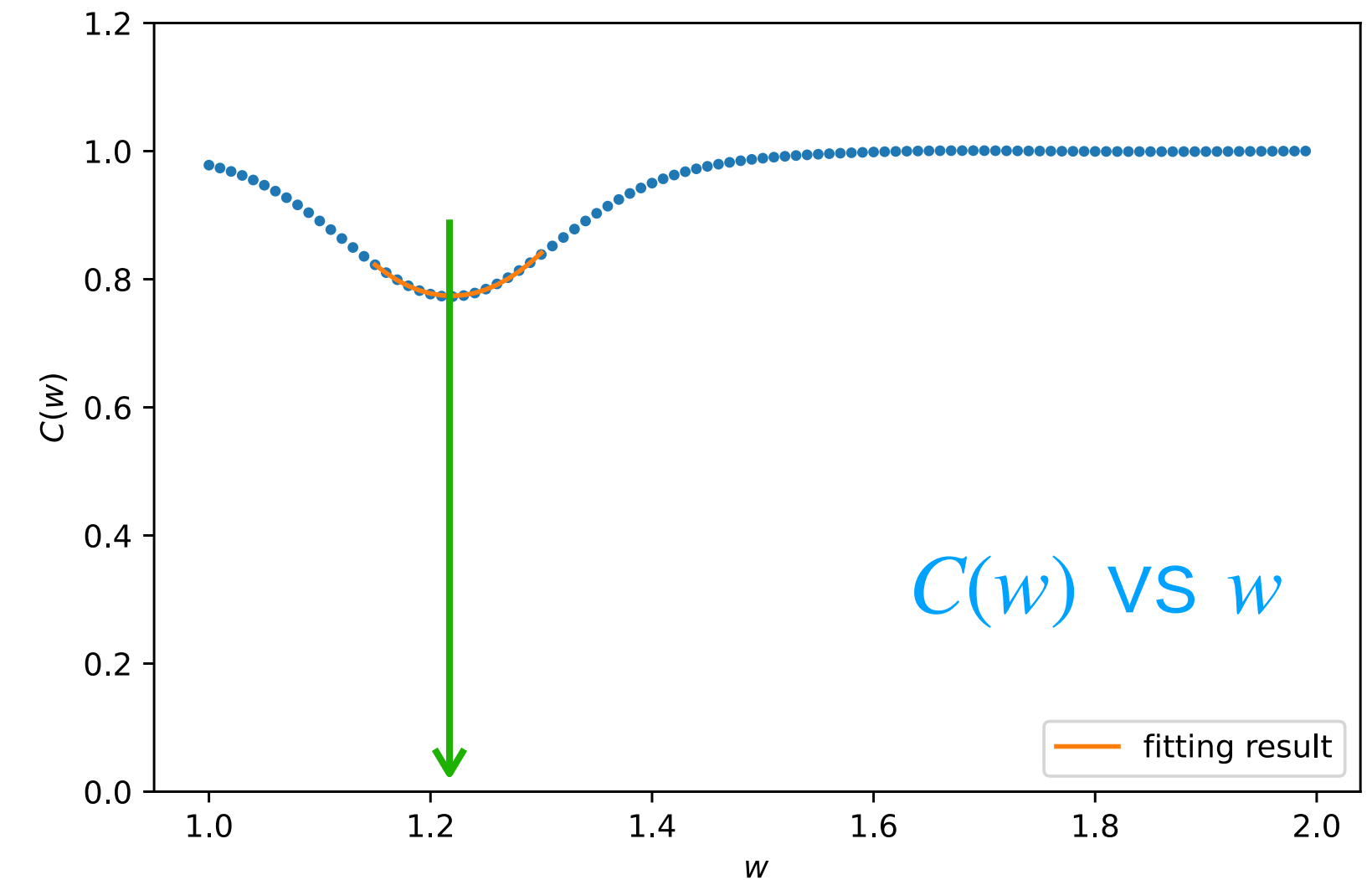
$\langle Q[\tilde{U}] \rangle$ の確率分布

$N_\rho = 40, V_L = 20^3 \times 5, T = 1.2T_{\text{dec}}(0)$



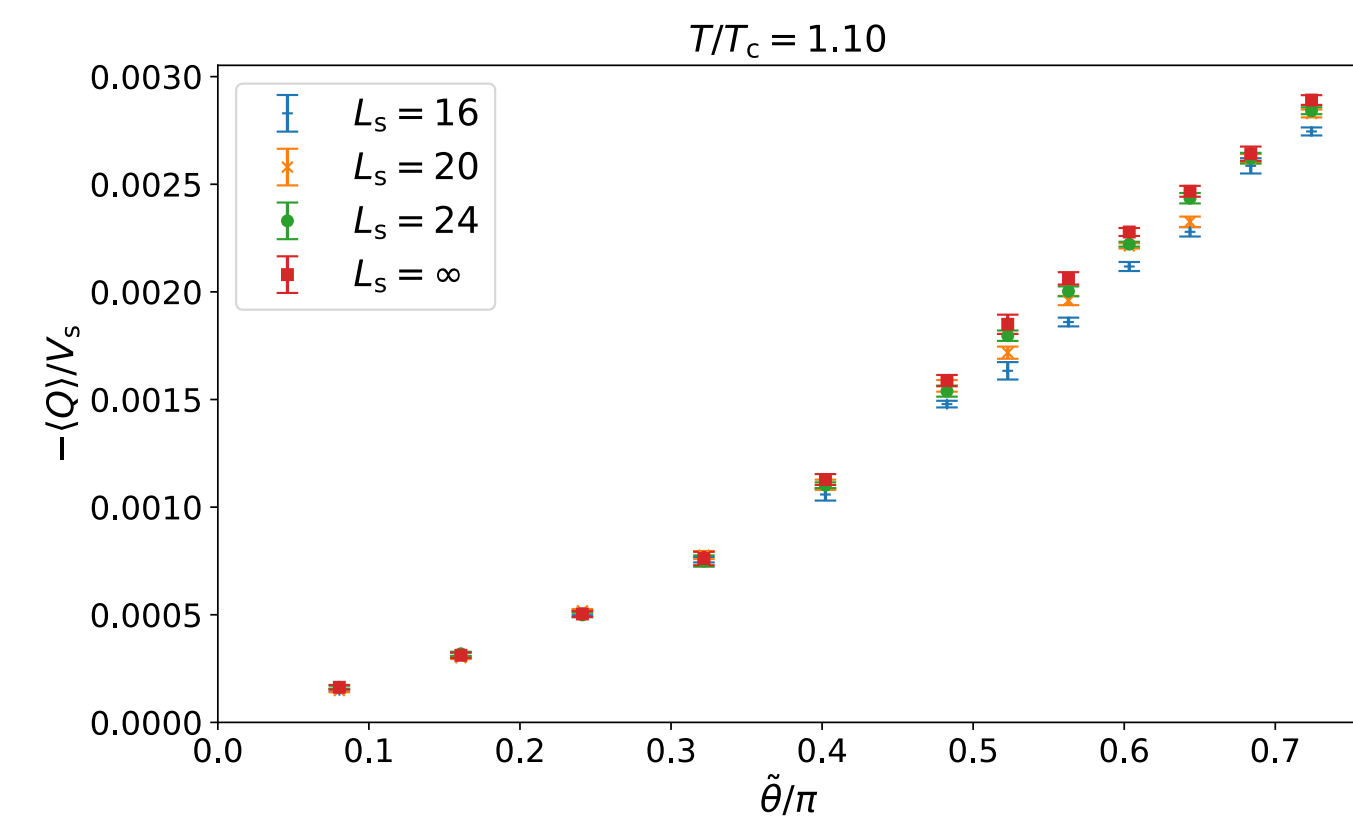
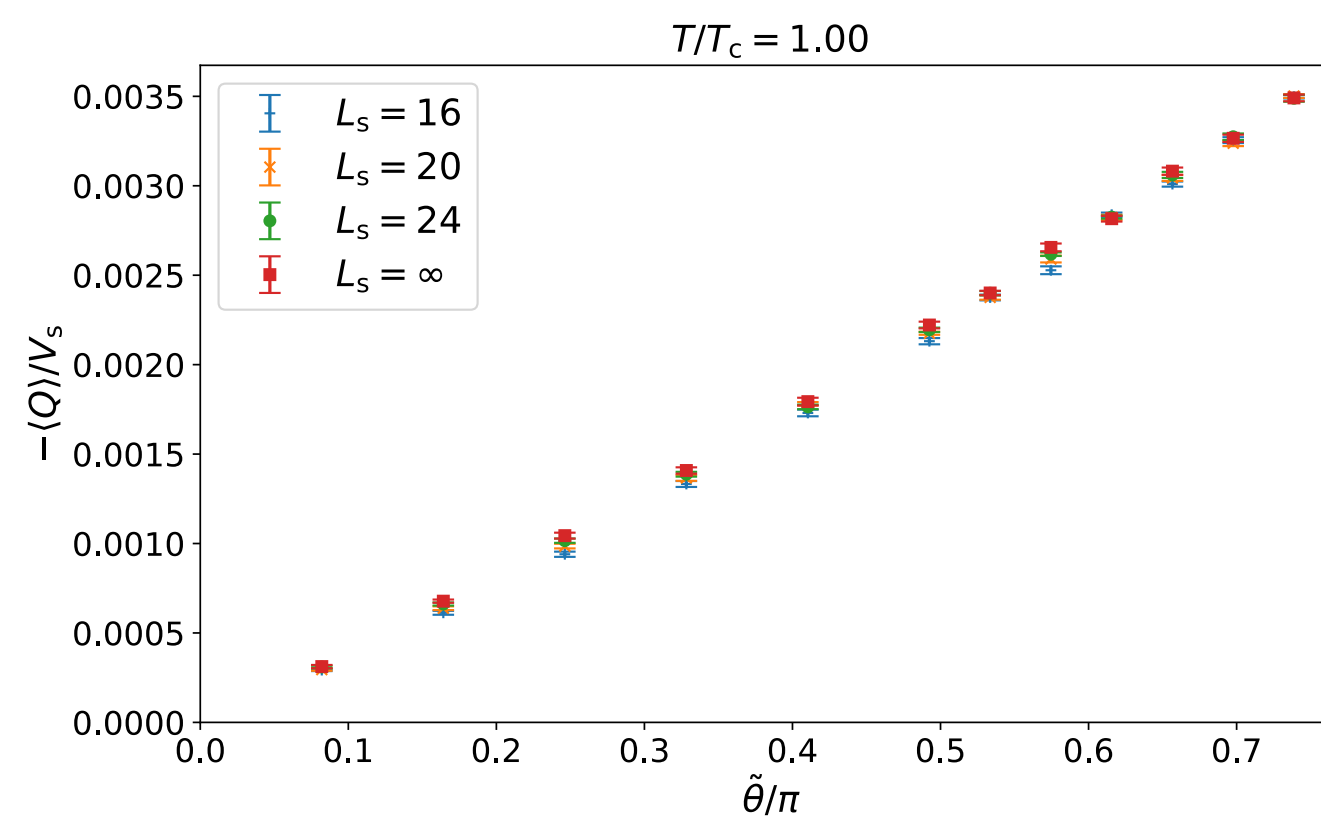
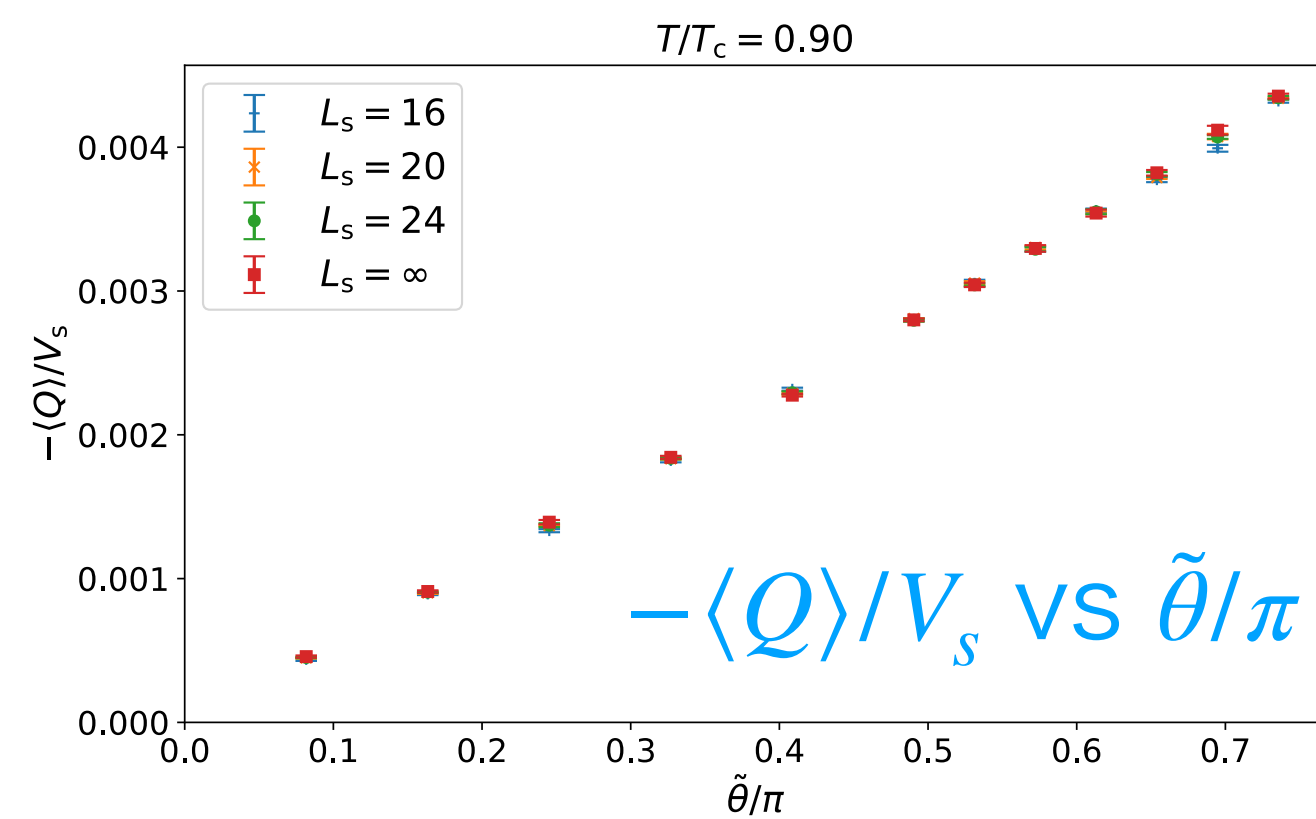
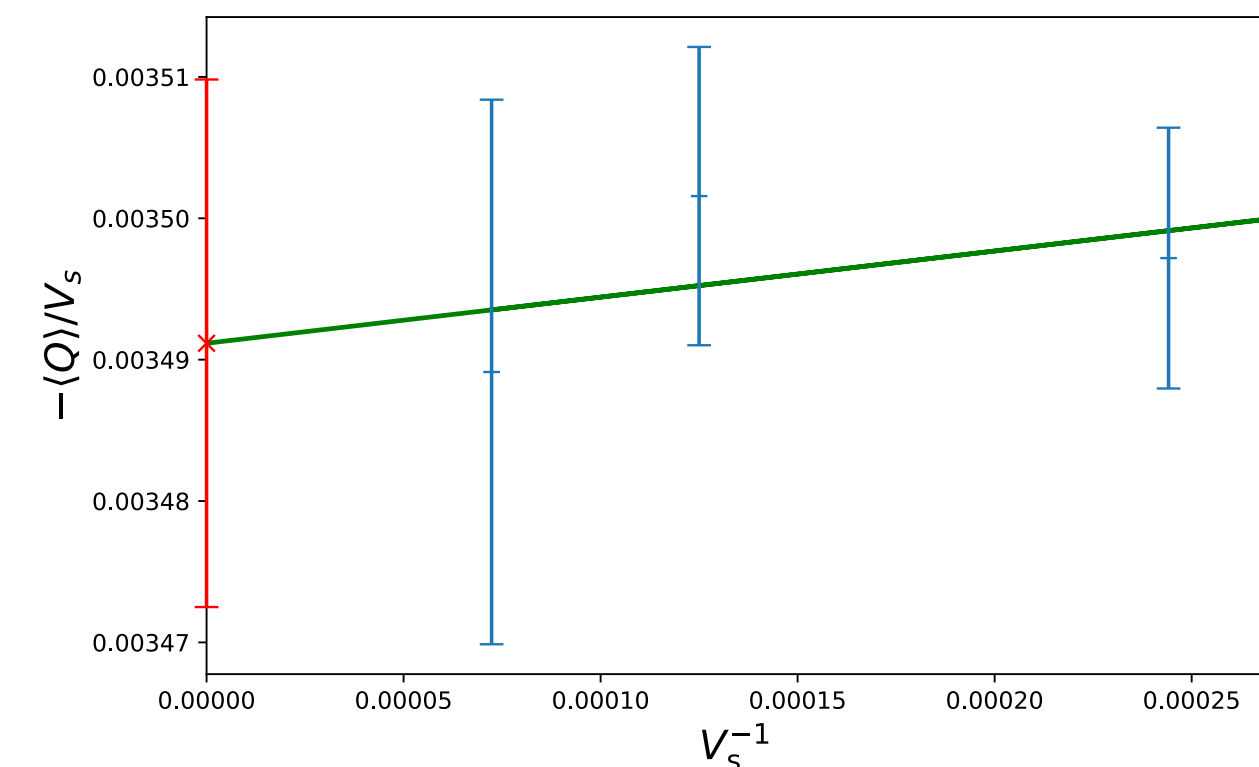
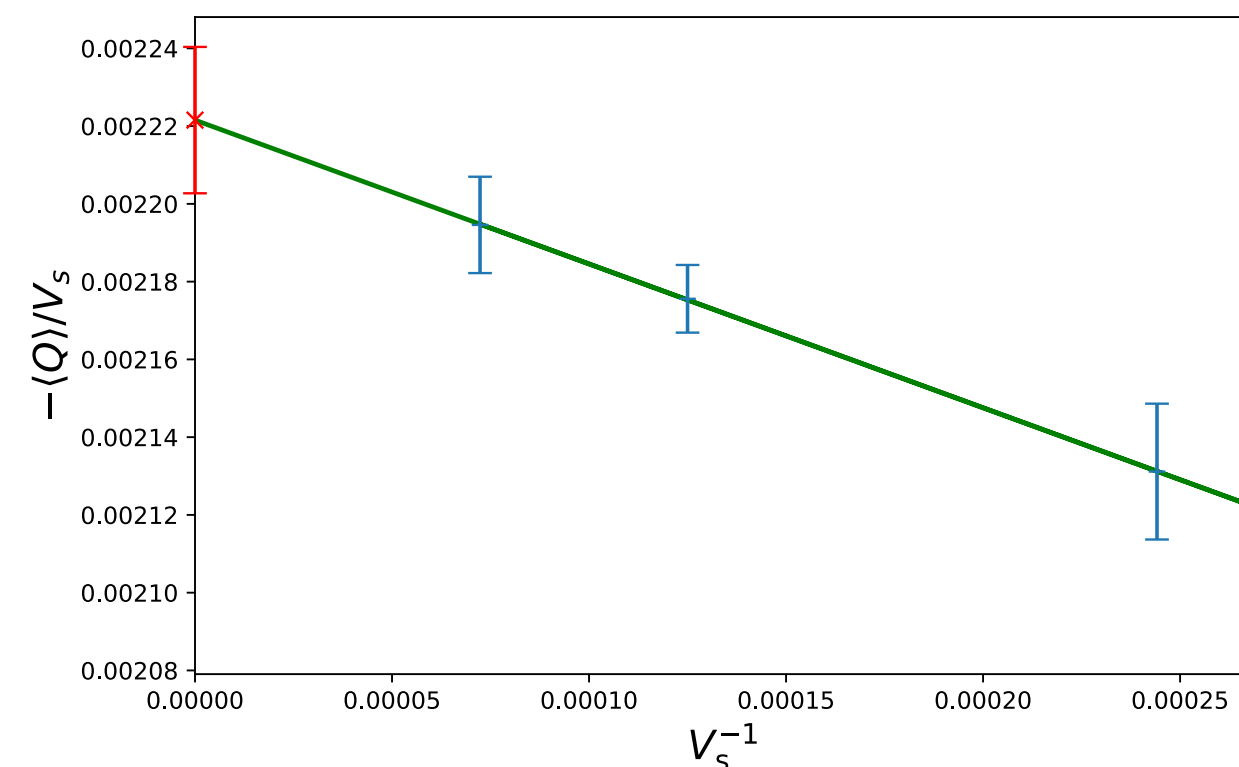
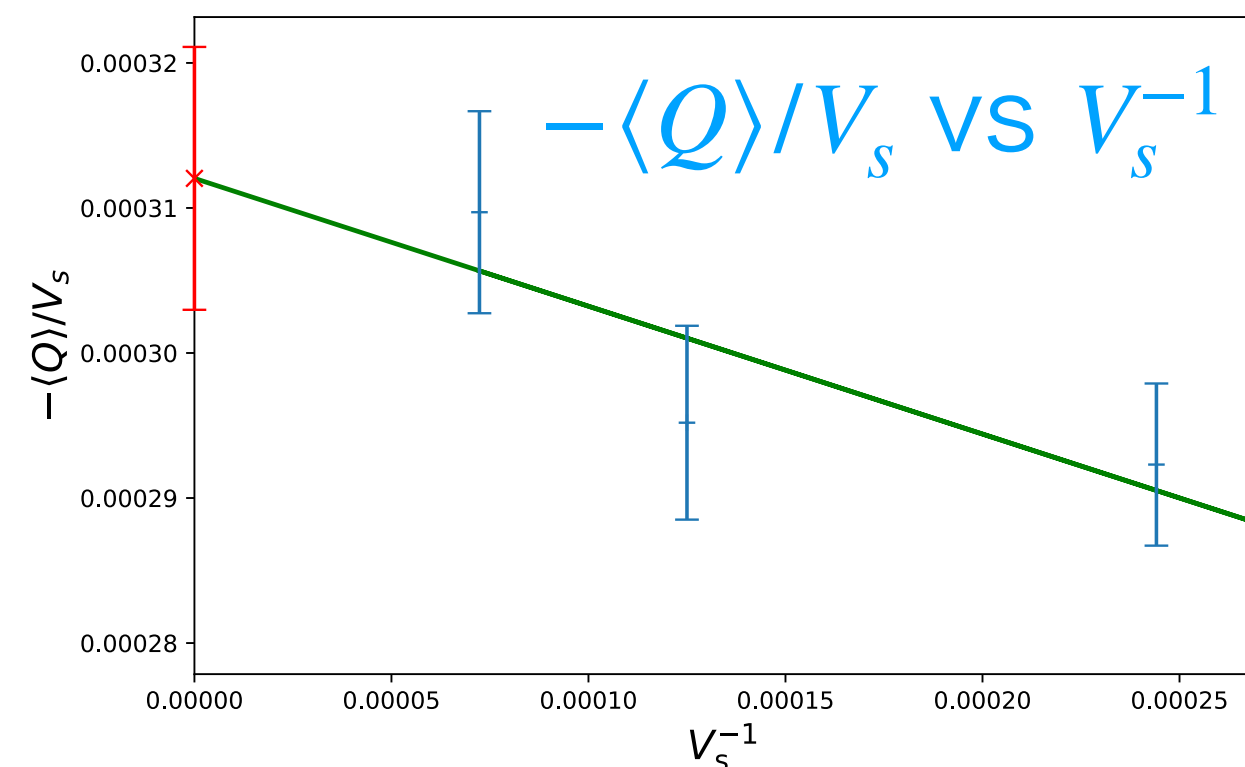
θ のリスケール

- $\langle Q[\tilde{U}] \rangle$ の分布のピーク位置は整数からずれている
- 整数に近づくように測定値をリスケール $Q \rightarrow wQ$
- 同時に θ もリスケール $\theta \rightarrow \theta/w$
- リスケールした θ は近似的に 2π 周期性を持つ
- w はコスト関数 $C(w) = \langle 1 - \cos(2\pi wQ) \rangle$ を最小化するように決定 $\rightarrow w \sim 1.2$



Imaginary θ での計算

- $L_t = 5$ に固定し、 $L_s = 16, 20, 24$ で計算した結果を用いて、
トポロジカルチャージ期待値 $\langle Q[\tilde{U}] \rangle_{\tilde{\theta}}$ を $L_s \rightarrow \infty$ に $a/V_s + b$ で線形外挿



Fitting ansatzの設定

$L_s \rightarrow \infty$ 外挿した $\langle Q[\tilde{U}] \rangle_{\tilde{\theta}}$ を2通りのansatzに対してfittingする

- **多項式展開** : $g(\tilde{\theta}) = b_1 \tilde{\theta} - b_3 \tilde{\theta}^3 + b_5 \tilde{\theta}^5$

$\longleftrightarrow g(\theta) = b_1 \theta + b_3 \theta^3 + b_5 \theta^5$: Gaussian + 補正 (motivated by 2D U(N) & large N)

- **sinh展開** : $h(\tilde{\theta}) = a_1 \sinh(\tilde{\theta}) + a_3 \sinh(3\tilde{\theta}) + a_5 \sinh(5\tilde{\theta})$

$\longleftrightarrow h(\theta) = a_1 \sin(\theta) + a_3 \sin(3\theta) + a_5 \sin(5\theta)$: instanton gas + 補正

トポロジカル感受率 $\chi_0 = \frac{-i}{V} \frac{\partial \langle Q \rangle}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{V} \frac{\partial \langle Q \rangle}{\partial \tilde{\theta}} \Big|_{\tilde{\theta}=0}$ を用いてパラメーターを1つ減らす

$$b_1 = \chi_0 \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \chi_0$$

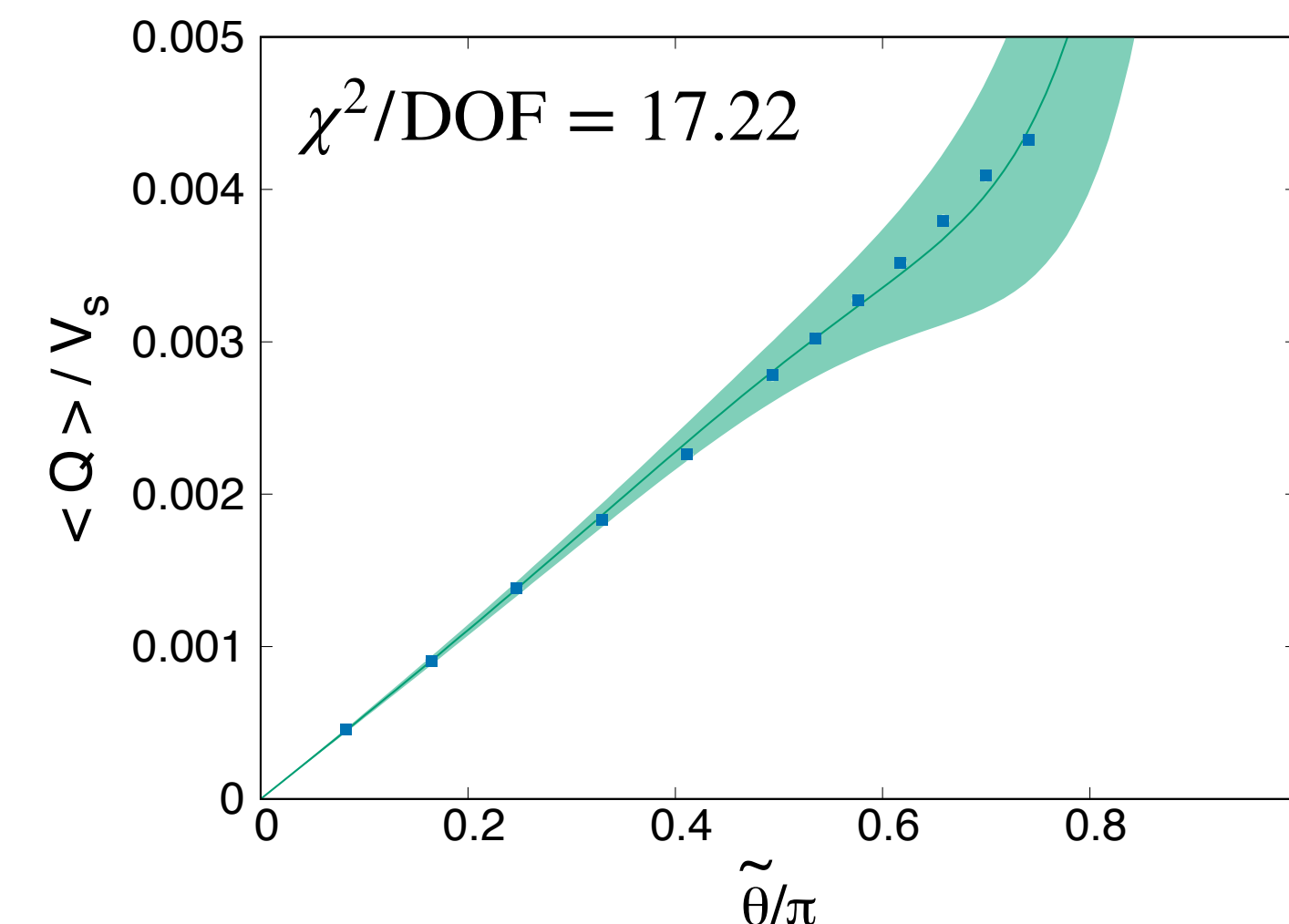
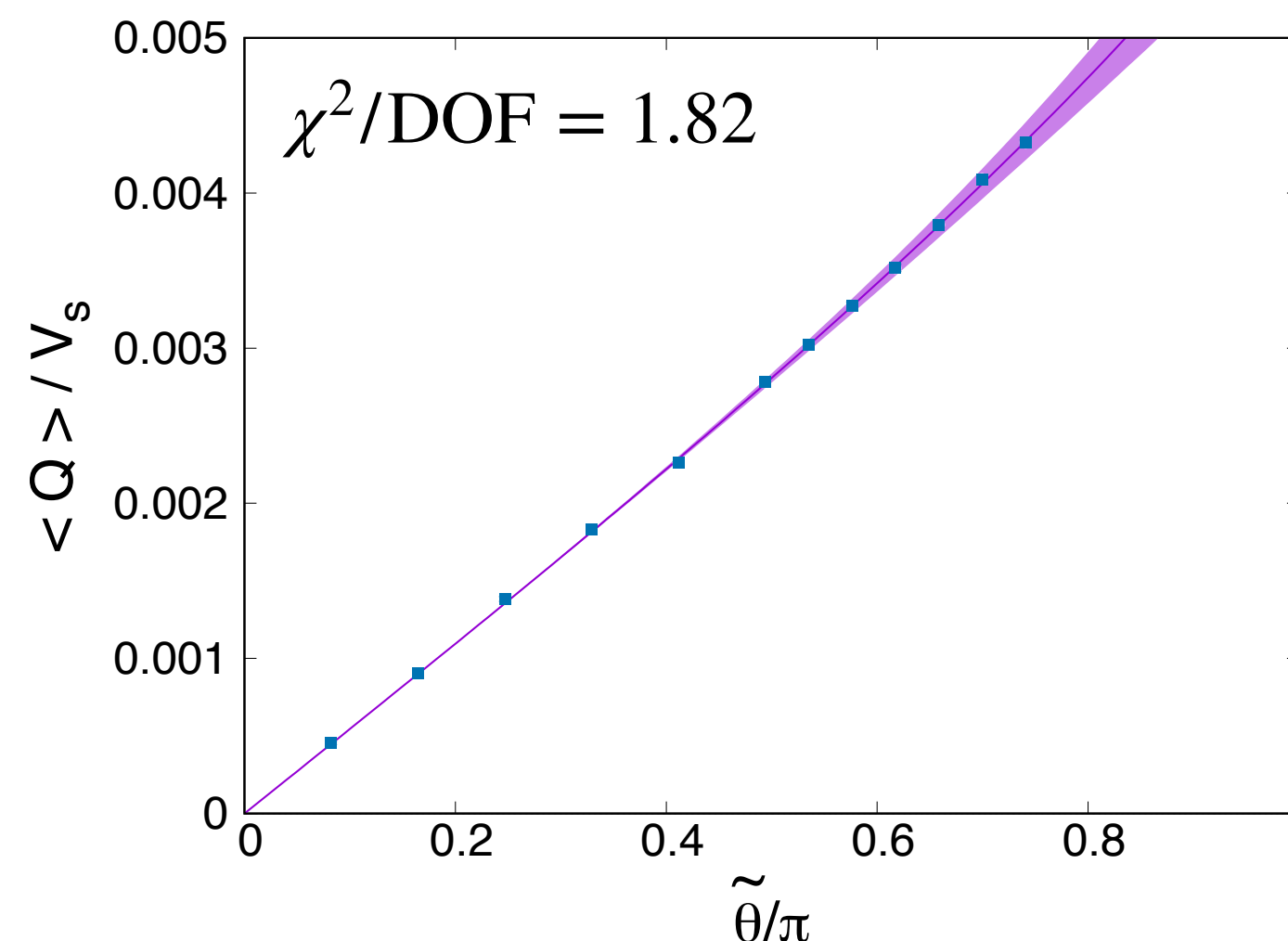
θ 依存性のfitting

$$g(\tilde{\theta}) = b_1\tilde{\theta} - b_3\tilde{\theta}^3 + b_5\tilde{\theta}^5$$

$$h(\tilde{\theta}) = a_1\sinh(\tilde{\theta}) + a_2\sinh(2\tilde{\theta}) + a_3\sinh(3\tilde{\theta})$$

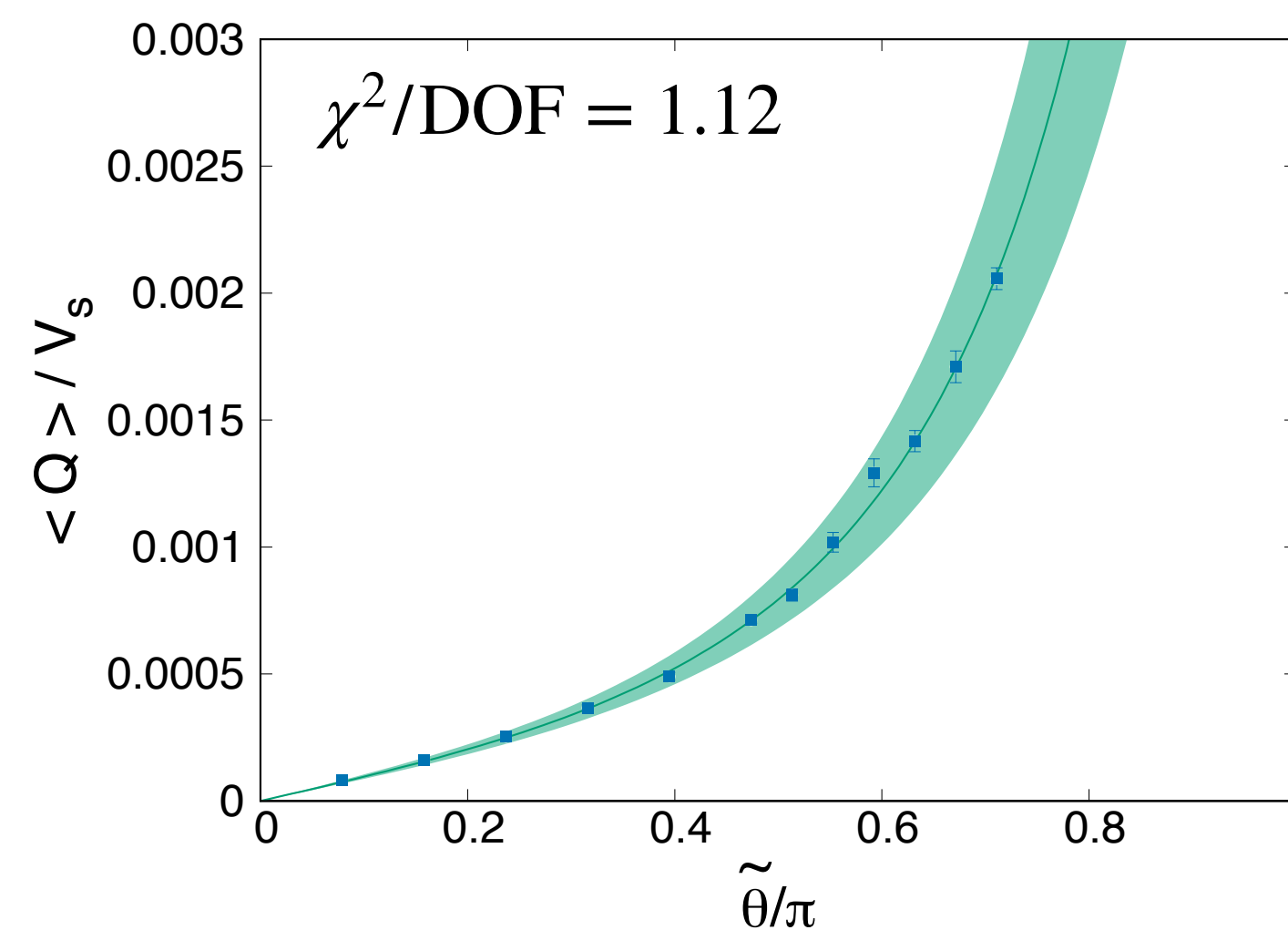
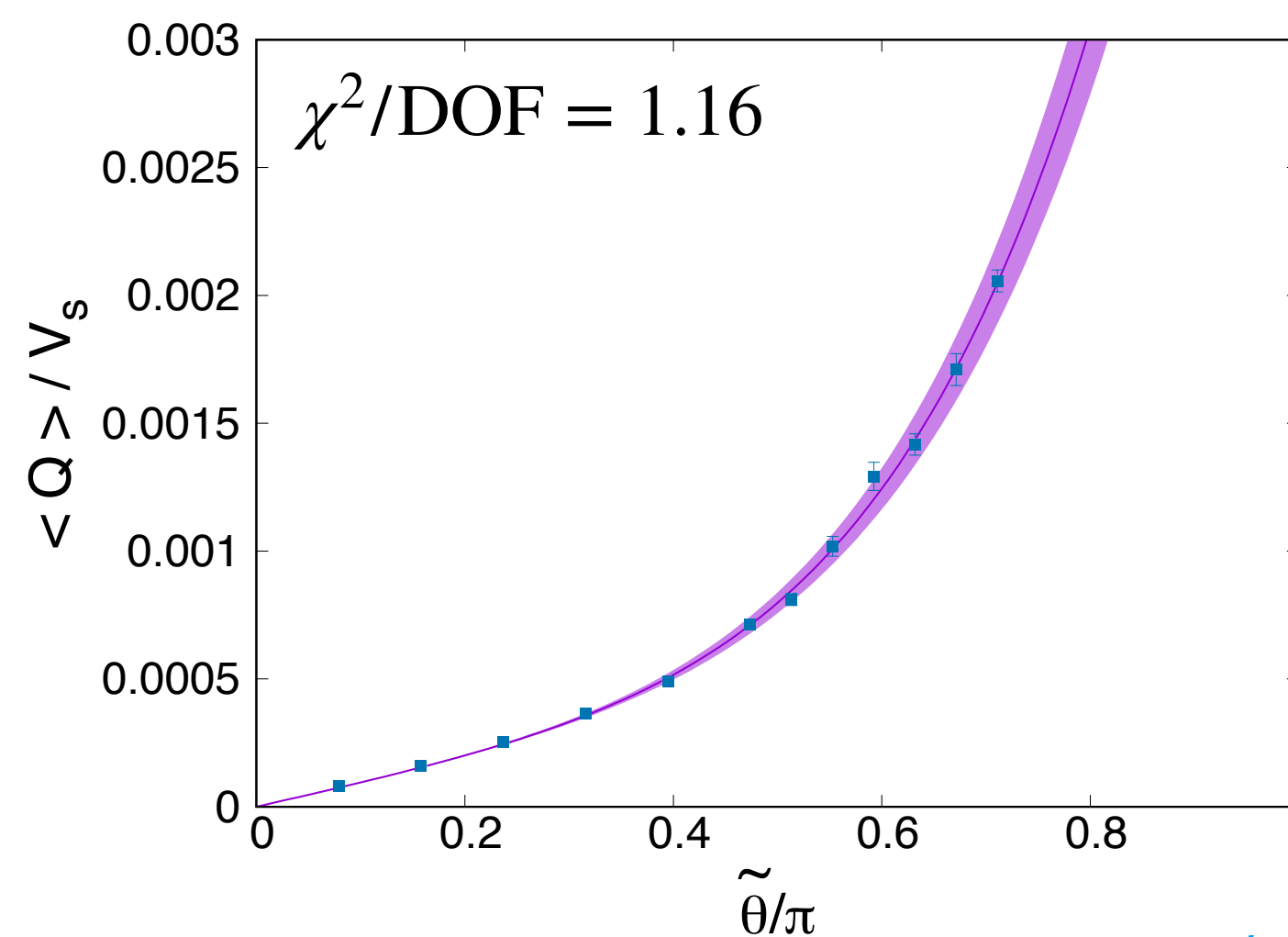
- $T/T_c = 0.9$ (低温側)

多項式fitが有効
 → Gaussian like



- $T/T_c = 1.2$ (高温側)

sinh fitが有効
 → instanton gas like



T_c : $\theta = 0$ での閉じ込め温度

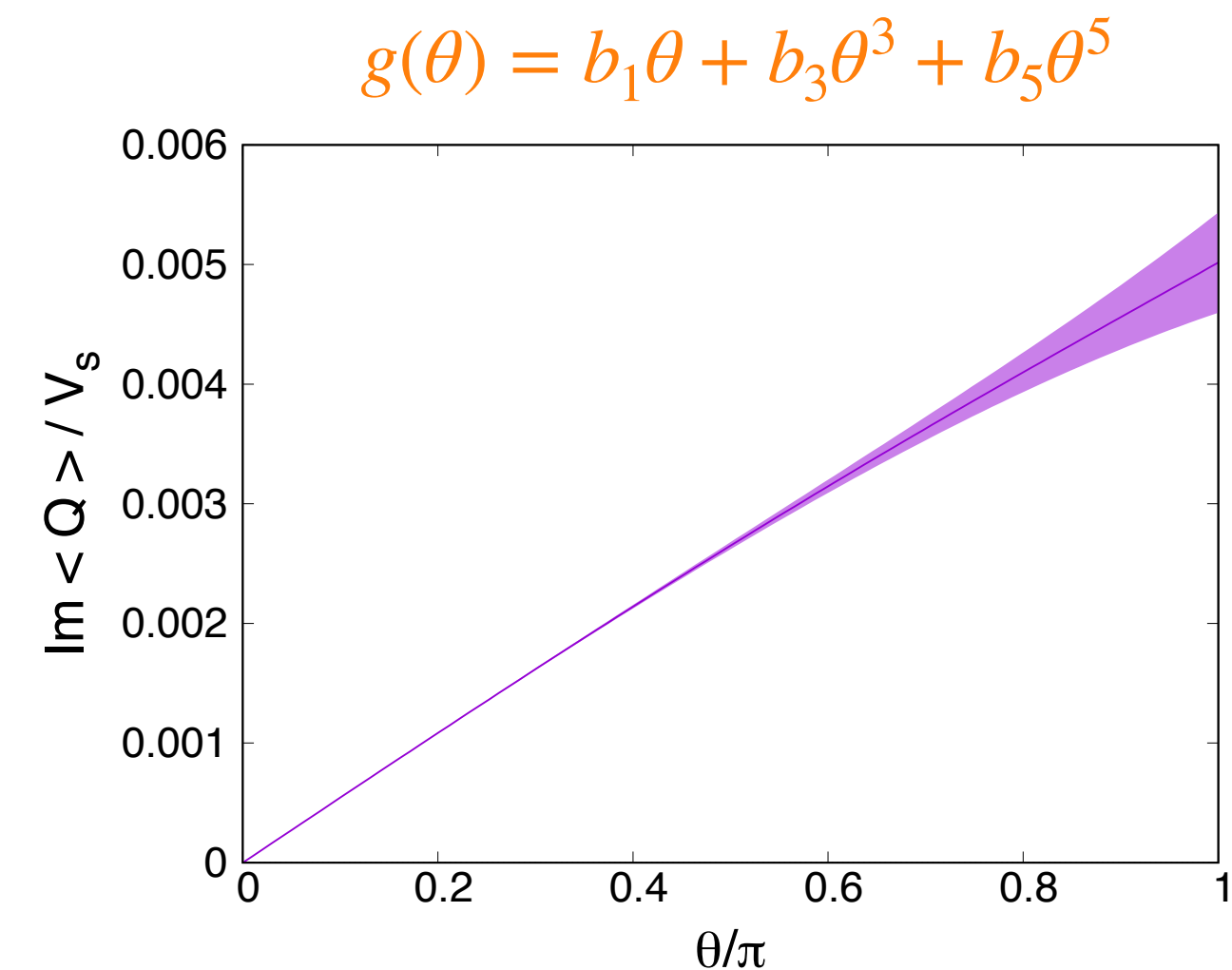
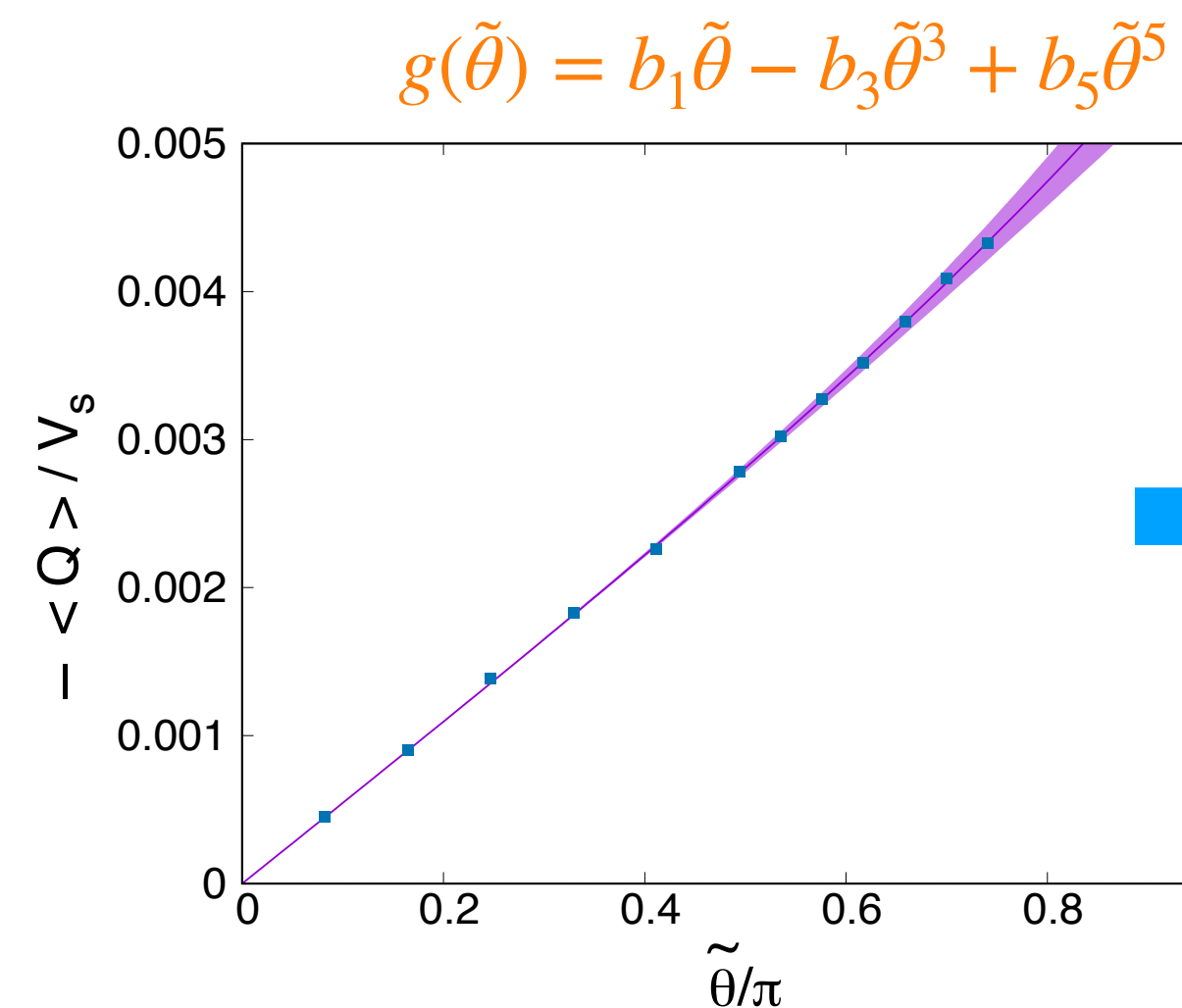
$\langle Q \rangle / V_s$ vs θ/π

解析接続の結果

- 多項式展開：

$$g(\theta) = b_1\theta + b_3\theta^3 + b_5\theta^5$$

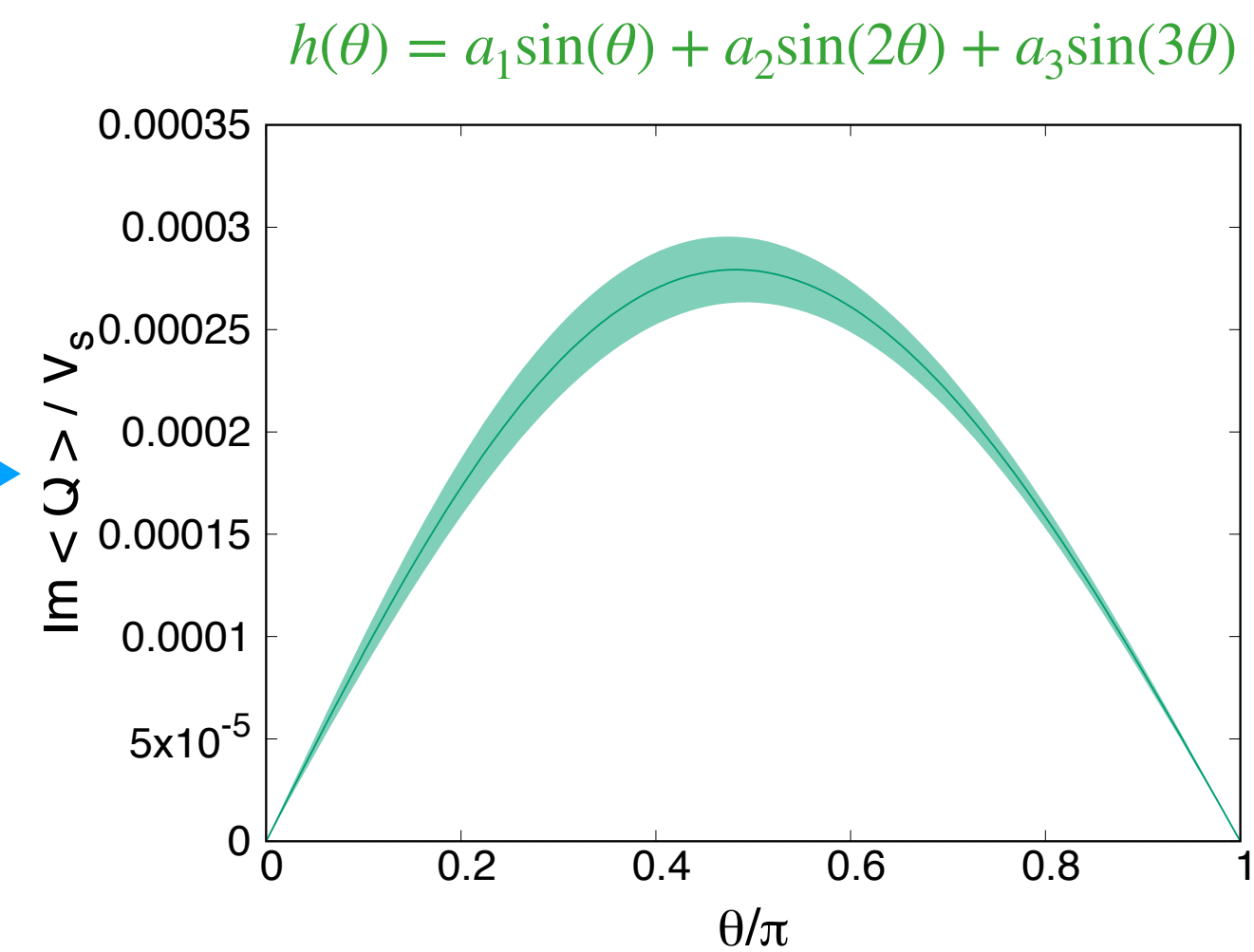
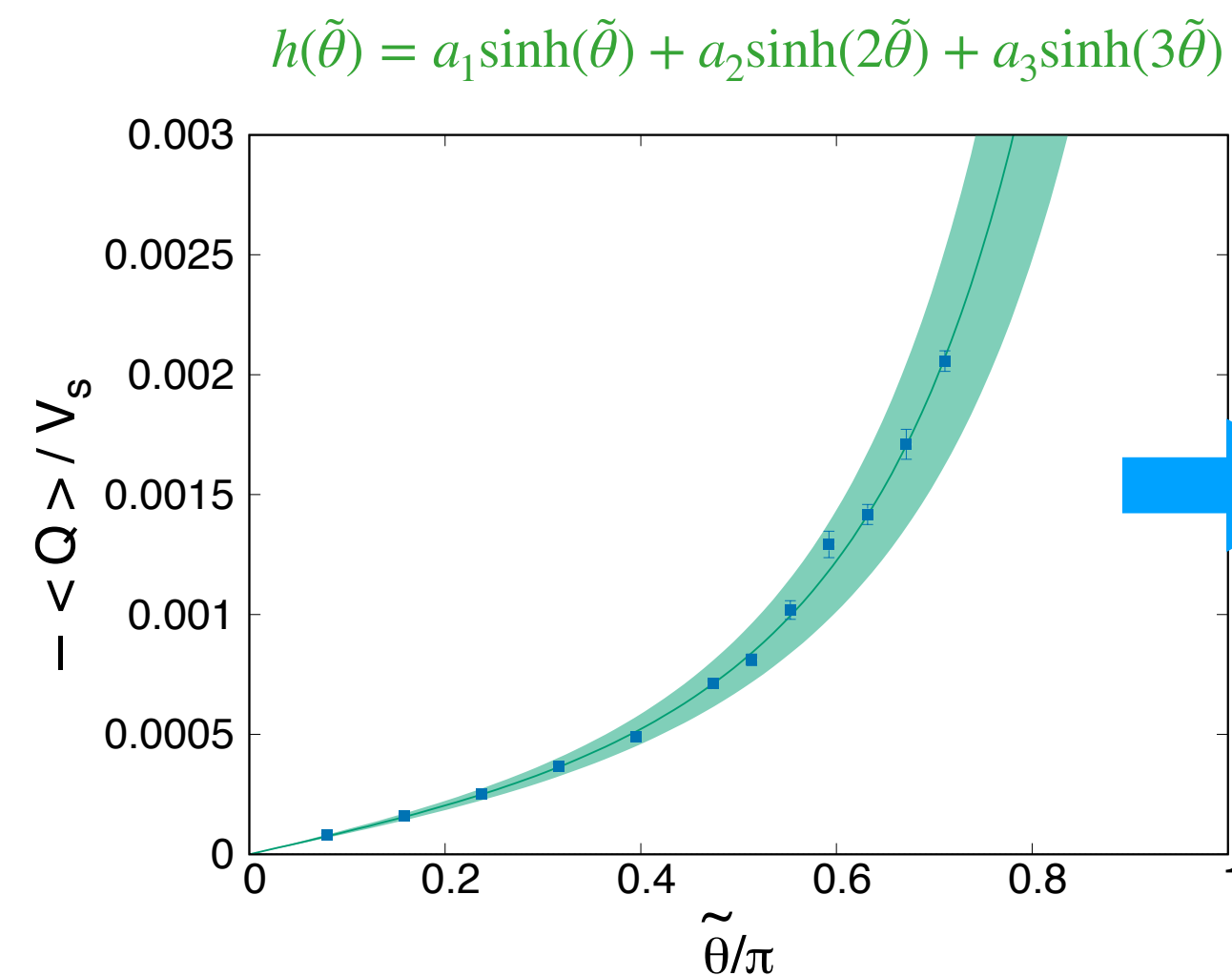
低温でCPが破れていることを示唆



- sin展開： (定義より $h(\pi) = 0$)

$$h(\theta) = a_1 \sin(\theta) + a_3 \sin(3\theta) + a_5 \sin(5\theta)$$

高温側でよく fit できるのは、
instanton gas 近似と無矛盾
→ CPの回復を示唆



$\langle Q \rangle / V_s$ vs θ / π

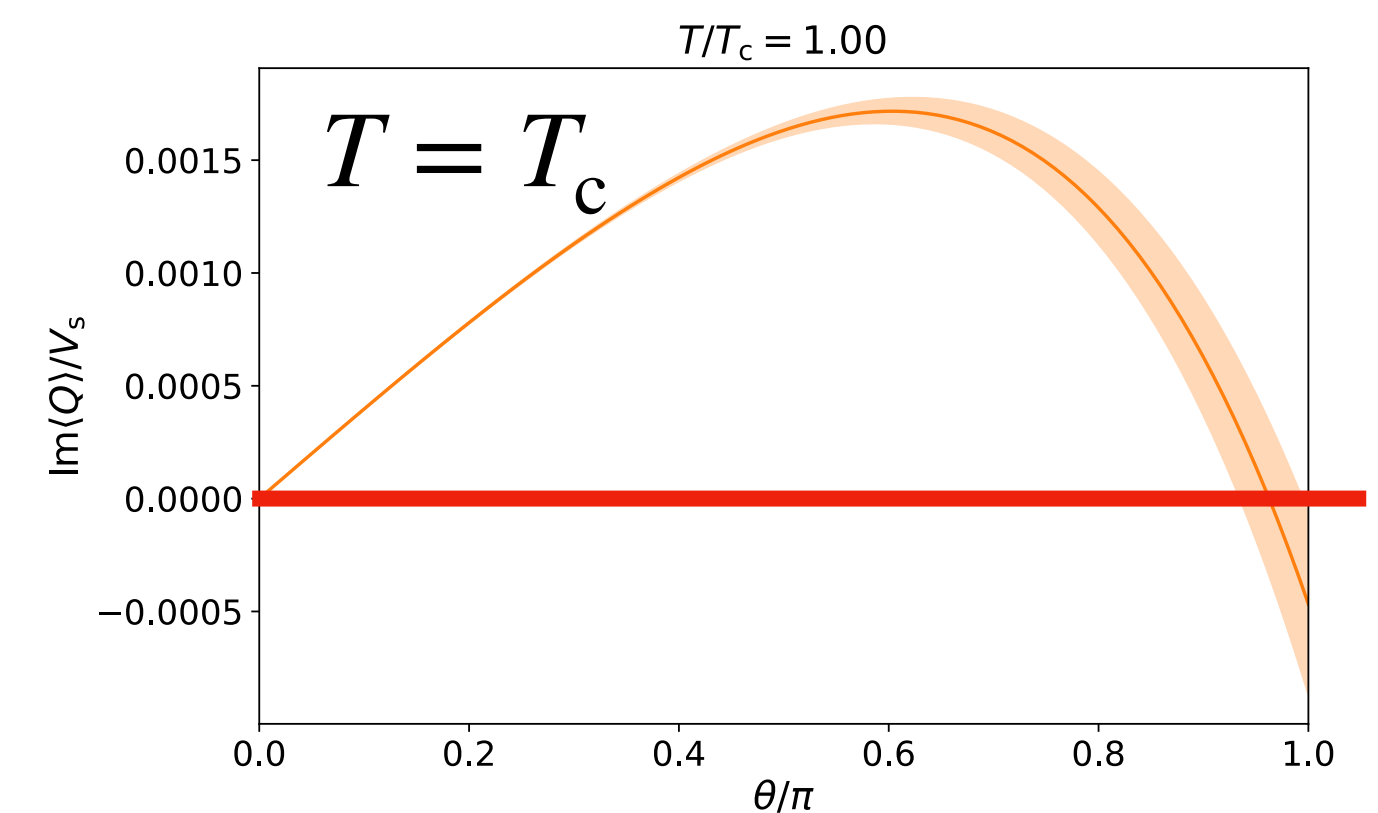
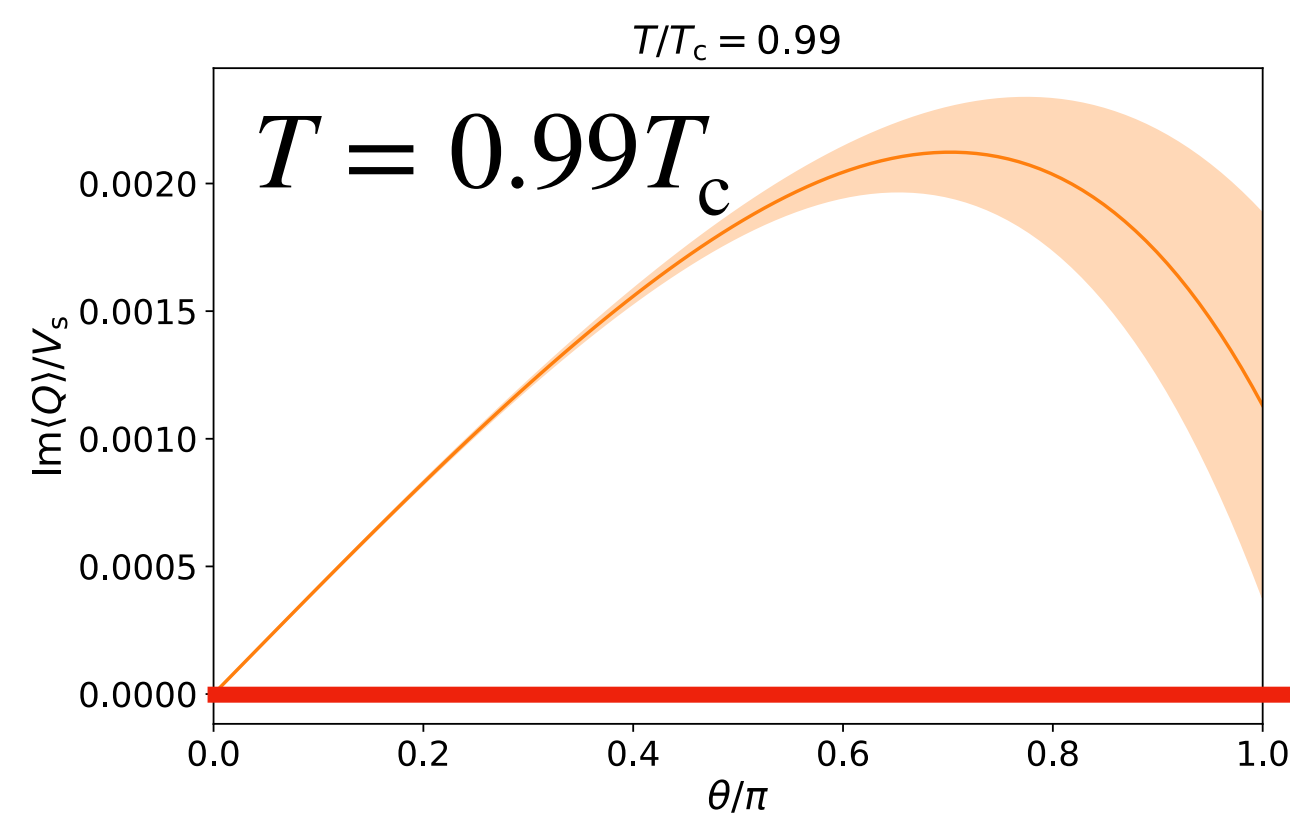
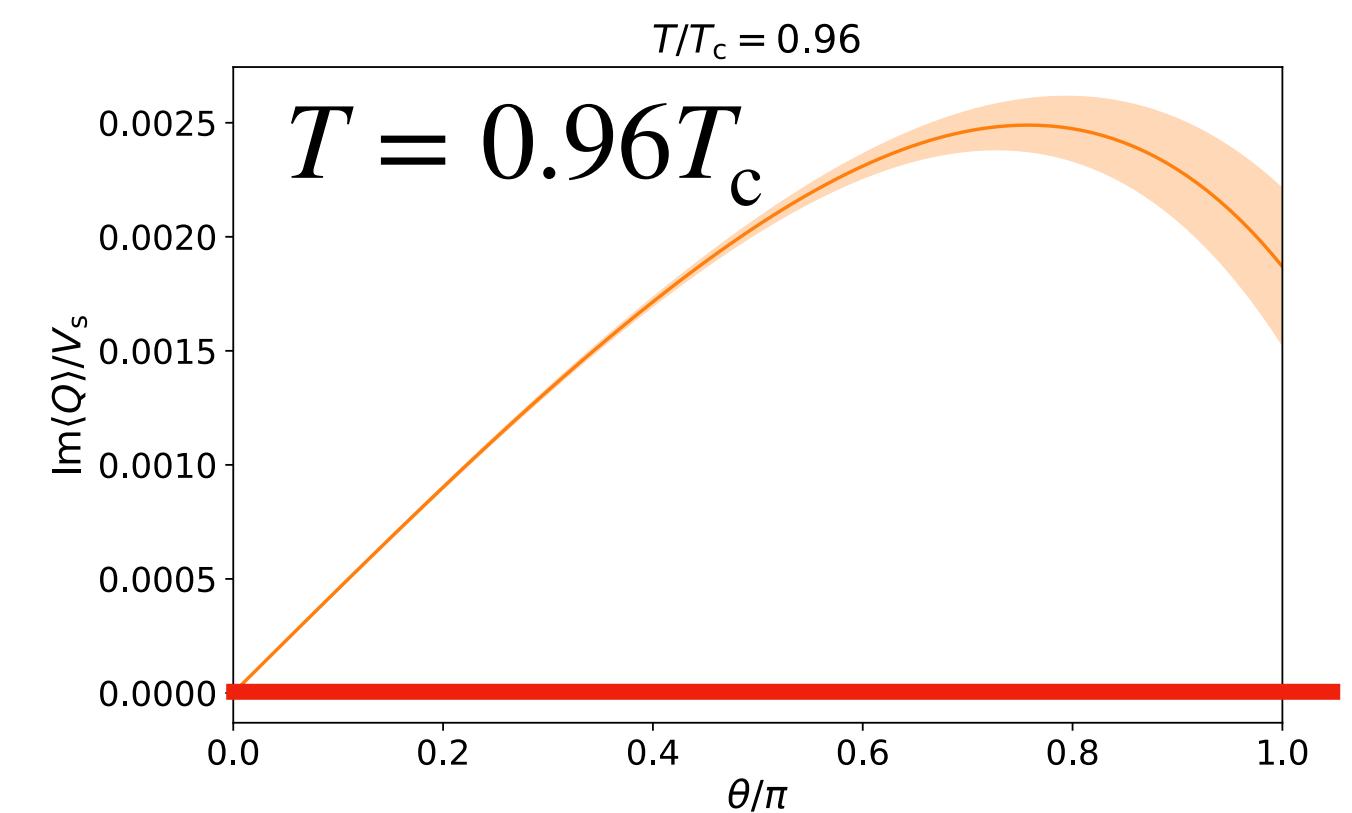
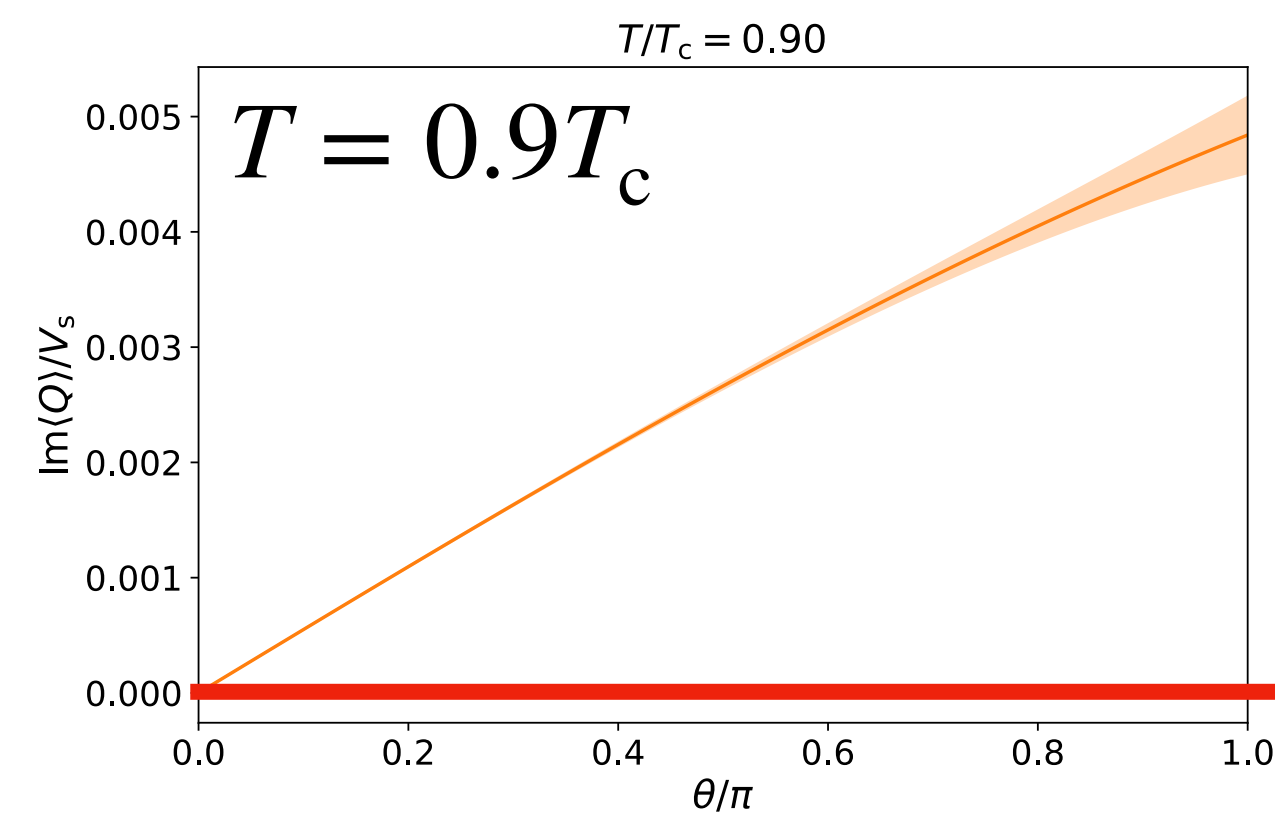
$\theta = \pi$ におけるCP対称性の温度変化

- 多項式展開による解析接続で求めた $\langle Q[\tilde{U}] \rangle_\theta$ の温度変化を見て、CP対称性の破れと回復を判定

- での閉じ込め相転移温度 T_c 付近で $\langle Q[\tilde{U}] \rangle_{\theta=\pi} = 0$ となる

- CPが回復する温度 T_{CP} の範囲：

$$0.99 \lesssim \frac{T_{CP}}{T_c} \lesssim 1.0$$

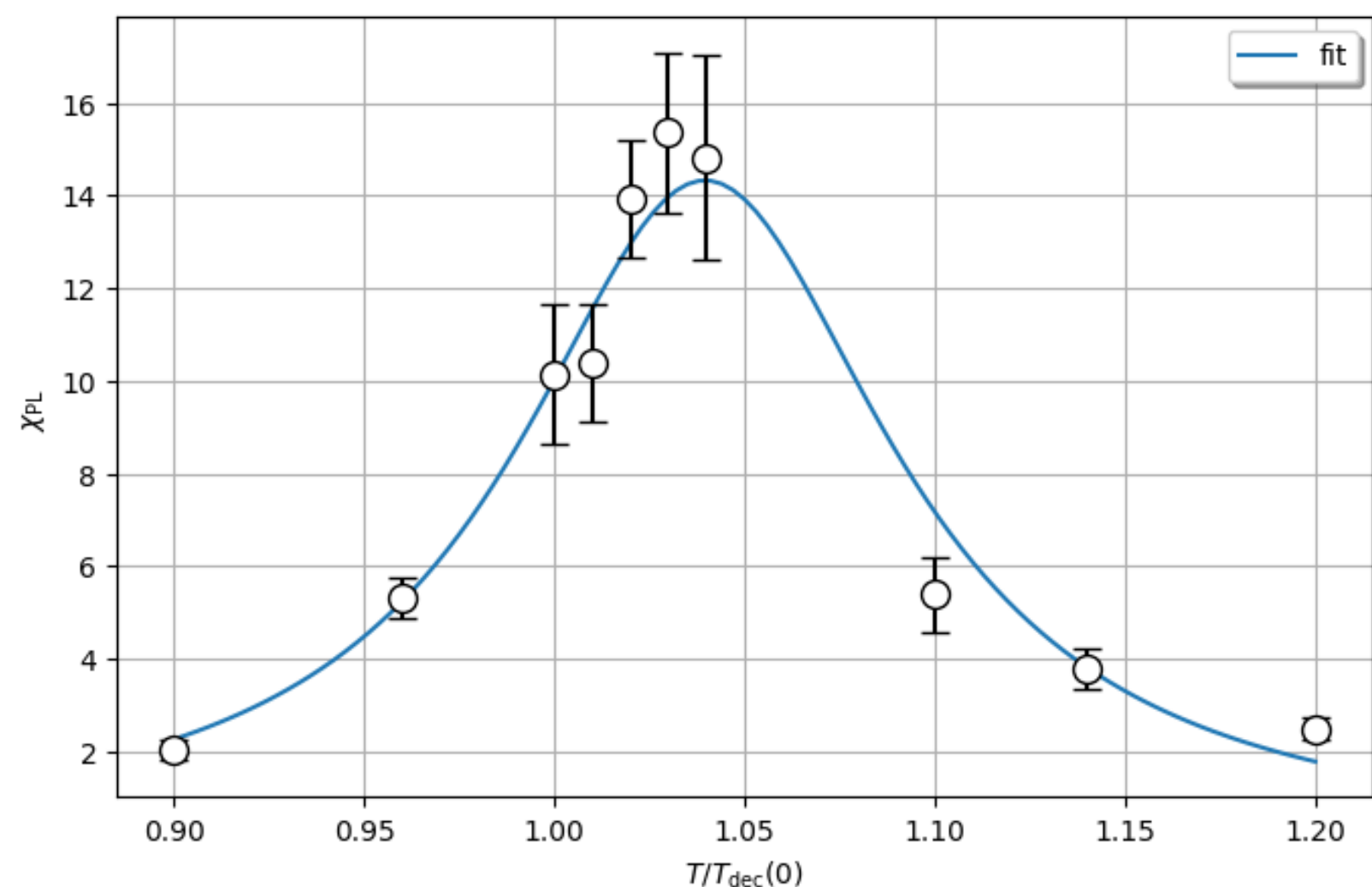


$\langle Q \rangle / V_s$ vs θ / π

閉じ込め温度の θ 依存性

- imaginary θ におけるPolyakov loop感受率から閉じ込め温度 $T_{\text{dec}}(\tilde{\theta})$ を求め、解析接続によりreal θ 側での振る舞いを推定：

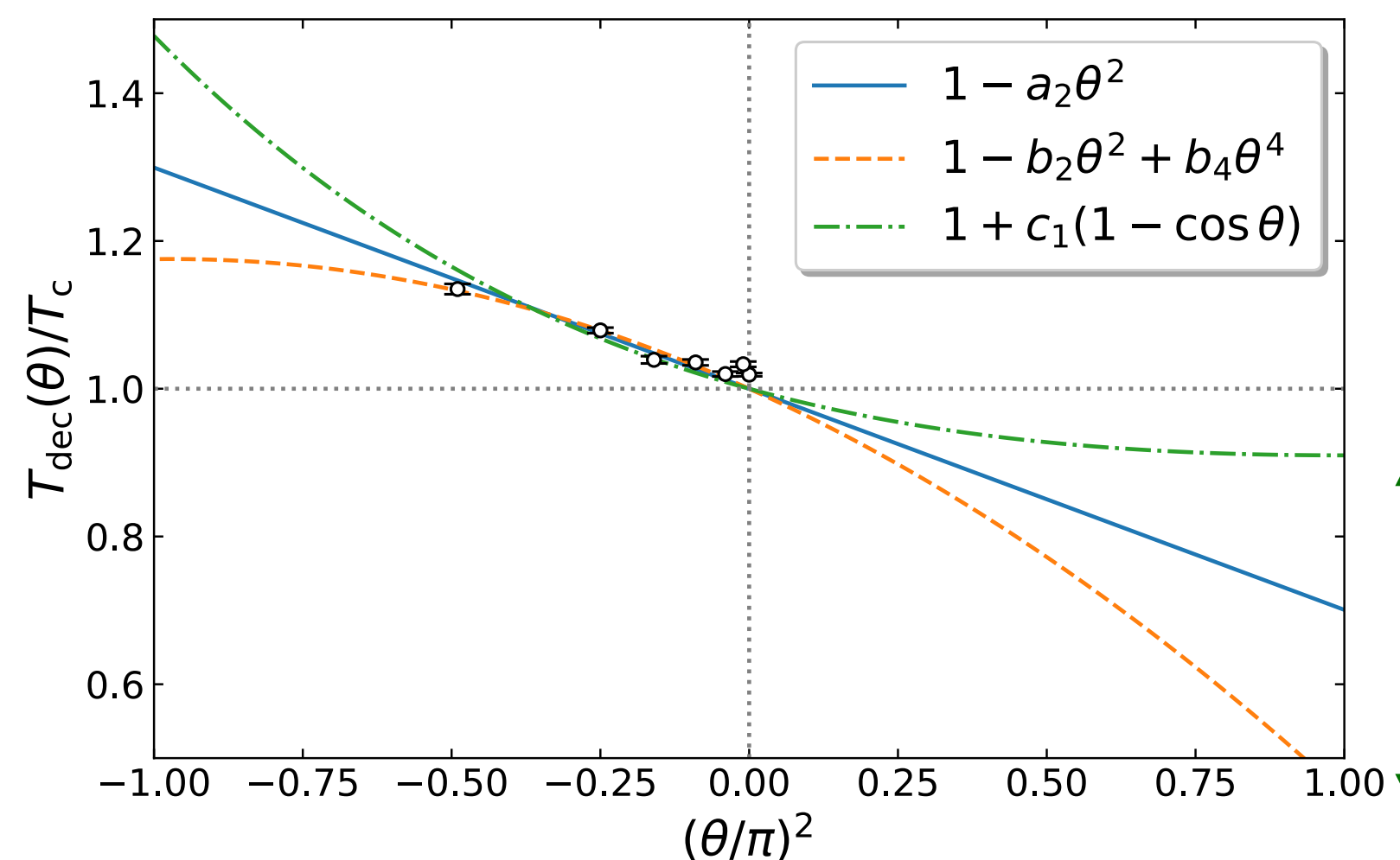
$$\frac{T_{\text{dec}}}{T_c}(\theta = \pi) \lesssim 0.91$$



($L_s = 24, L_t = 5, \tilde{\theta} = 0.3\pi$)

Polyakov loop感受率

$T_{\text{dec}}(\theta)/T_c$ vs $(\theta/\pi)^2$



pure imaginary θ real θ

analytic continuation

cf.) SU(3)の場合

$$\frac{T_{\text{dec}}(\theta)}{T_{\text{dec}}(0)} \approx 1 - 0.0178 \theta^2 + \dots$$

[D'Elia & Negro (2013)]

[Otake & Yamada (2022)]

$$T_{\text{dec}}(\theta = \pi) \lesssim 0.91 T_c$$

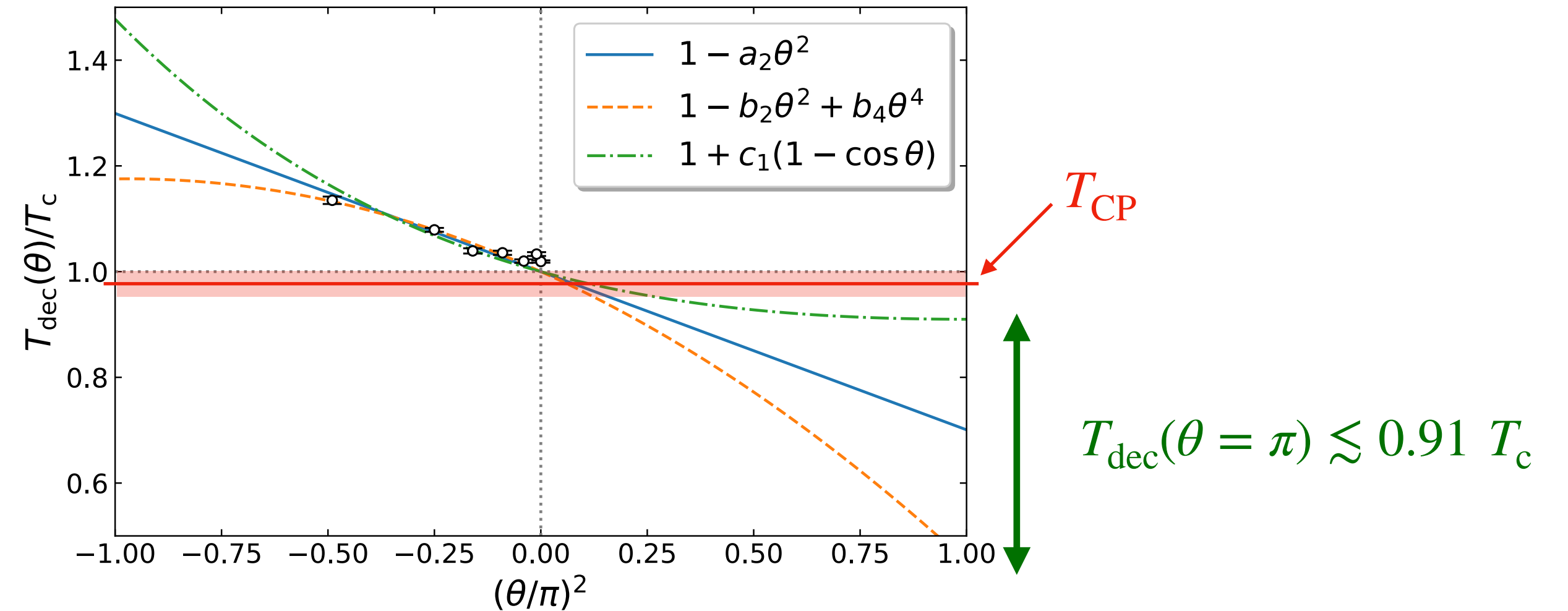
$$a_2 = 0.0303$$

$$b_2 = 0.0367, b_4 = -0.0019$$

$$c_1 = -0.045$$

CPの回復と閉じ込め温度の関係

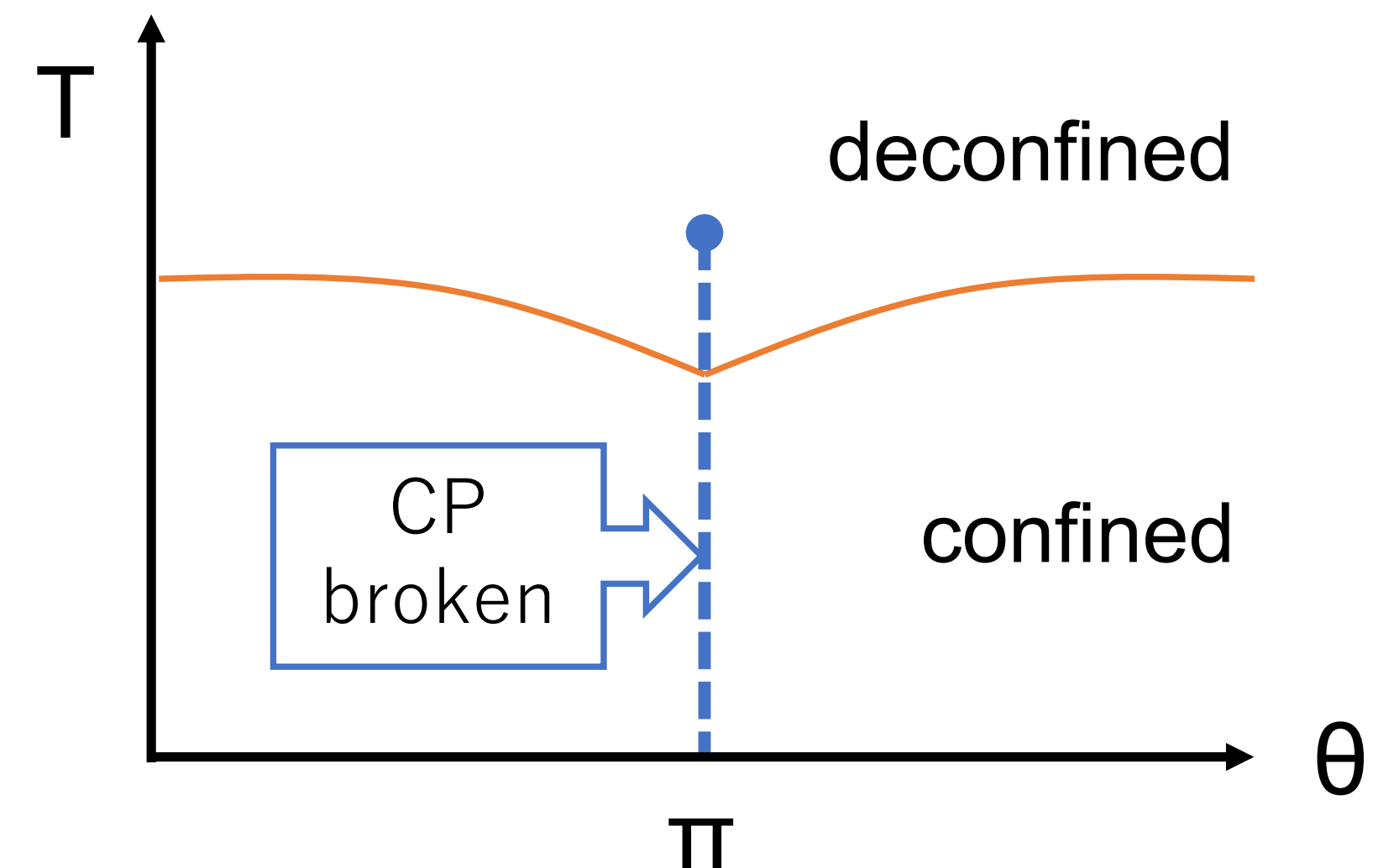
- CPが回復する温度： $0.99 \lesssim \frac{T_{CP}}{T_c} \lesssim 1.0$



- 閉じ込め温度： $\frac{T_{dec}}{T_c}(\theta = \pi) \lesssim 0.91$

→ $T_{CP} > T_{dec}(\theta = \pi)$

- CPが破れた領域が非閉じ込め相にも存在



Simulation results

1. Introduction

2. Method

3. Result

4. Summary

まとめ

- トポロジカルチャージ期待値の θ 依存性を符号問題のない imaginary θ 領域で計算し、解析接続を用いて $\theta = \pi$ での温度依存性を推定
- stout smearingを用いてゲージ配位のトポロジカルな性質を回復
- $\langle Q[\tilde{U}] \rangle_{\theta=\pi} = 0$ となる温度 $\rightarrow 0.99 \lesssim T_{\text{CP}}/T_c \lesssim 1.0$
- 閉じ込め相転移温度 $\rightarrow T_{\text{dec}}(\theta = \pi) \lesssim 0.91 T_c$
- CP-broken deconfined phase を示唆 $T_{\text{CP}} > T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$
- large Nの場合 $T_{\text{CP}} = T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$ とは異なるが、anomaly matchingとは無矛盾

展望

- 連続極限
- improved actionを用いてsmearing step数を減らす
- smearingによるartifactを取り除く

- SU(3)の場合での検証
- $N \geq 3$ では閉じ込め相転移が1次相転移になる
- Nを大きくすると、どこかでlarge Nと同様 $T_{\text{CP}} = T_{\text{dec}}(\theta = \pi)$ になると期待